§ 1.1 映射与函数

一、集合

二、映射

三、函数

一、集合

1. 集合

❖集合

集合是指具有某种特定性质的事物的总体.

集合可用大写的字母 A, B, C, D 等标识.

❖元素

组成集合的事物称为集合的元素.

集合的元素可用小写的字母 a, b, c, d 等标识.

a 是集合 M 的元素记为 $a \in M$, 读作 a 属于 M.

a 不是集合 M 的元素记为 $a \notin M$, 读作 a 不属于 M.

❖几个数集

所有自然数构成的集合记为**N**, 称为自然数集.

所有实数构成的集合记为**R**, 称为实数集.

所有整数构成的集合记为**Z**, 称为整数集.

所有有理数构成的集合记为**Q**, 称为有理数集.

❖子集

如果集合A的元素都是集合B的元素, 则称A是B的子集, 记为$A \subset B$(读作A包含于B).

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{若} x \in A, \text{则} x \in B.$$

显然, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2. 集合的运算

设A、B是两个集合, 则

$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$称为A与B的并集(简称并).

$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$称为A与B的交集(简称交).

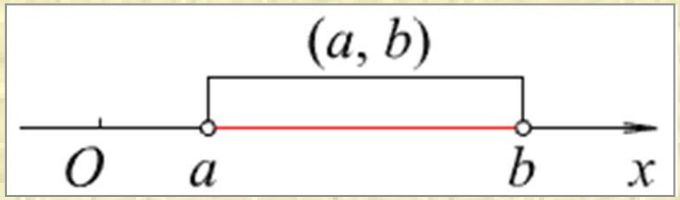
$A\backslash B=\{x|x\in A$且$x\notin B\}$称为A与B的差集(简称差).

$A^C=I\backslash A$ 称为A的余集或补集, 其中I为全集.

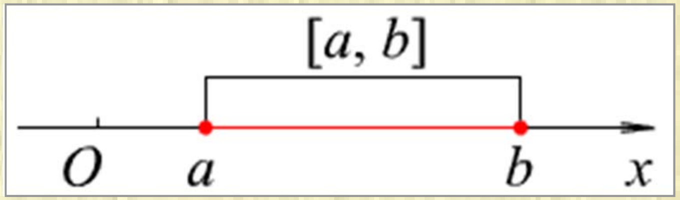
3. 区间和邻域

❖有限区间

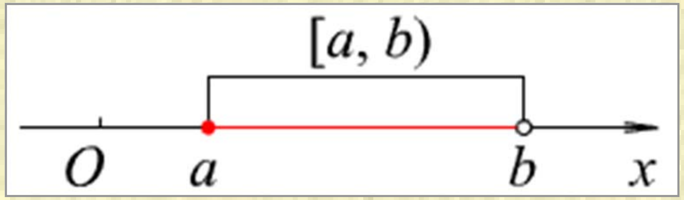
$(a, b)=\{x|a<x<b\}$——开区间.



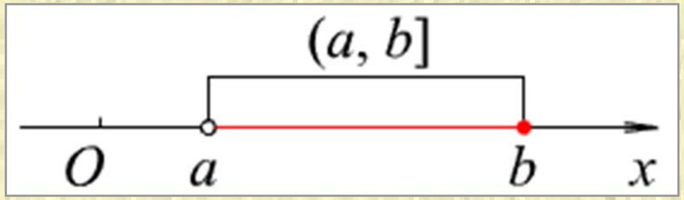
$[a, b]=\{x|a\leq x\leq b\}$——闭区间.



$[a, b)=\{x|a\leq x<b\}$——半开区间,



$(a, b]=\{x|a<x\leq b\}$——半开区间.

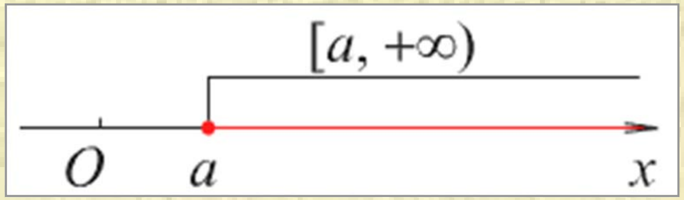


上述有限区间中，a 和 b 称为区间的端点，$b-a$ 称为**区间的长度**.

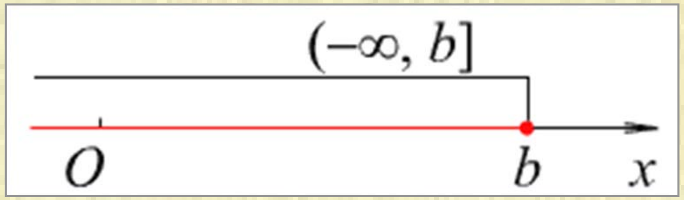
3. 区间和邻域

❖无限区间

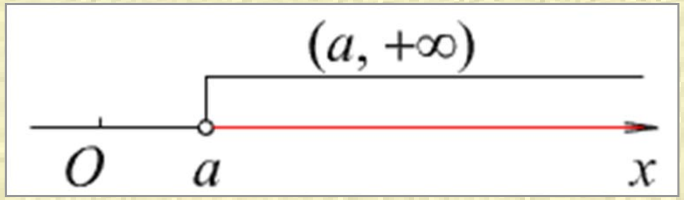
$$[a, +\infty)=\{x|a\leq x\},$$



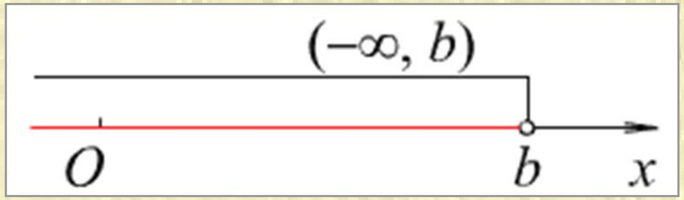
$$(-\infty, b]=\{x|x\leq b\},$$



$$(a, +\infty)=\{x|a<x\},$$



$$(-\infty, b)=\{x|x<b\},$$

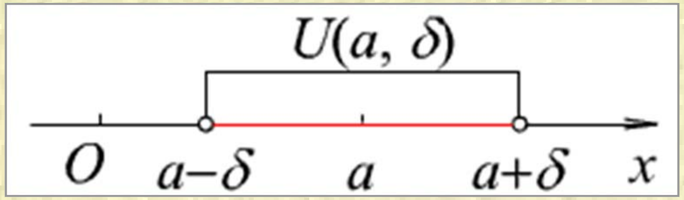


$$(-\infty, +\infty)=\{x|\ |x|<+\infty\}.$$

❖邻域

$$U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 其中点 a 称为邻域的中心, 正数 δ 称为邻域的半径.

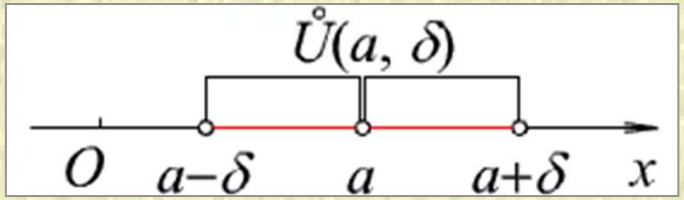


设变量 $x \in U(a, \delta)$, 则 δ 越小, 表示 x 与 a 越接近.

当不标明半径时, 以点 a 为中心的邻域, 记作 $U(a)$.

❖去心邻域

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$



二、函数

1. 函数概念

❖定义

设数集 $D\subset\mathbf{R}$, 则称映射 $f: D\rightarrow\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f, 即 $D_f=D$.

❖自然定义域

定义域未标明的算式表示的函数, 其定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为函数的自然定义域.

例1　求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geq 0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}x\neq \pm 1\\ x\geq -2\end{cases},$$

$$\therefore D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

❖函数的两要素

构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

注：值域不同的两个函数一定不相同.

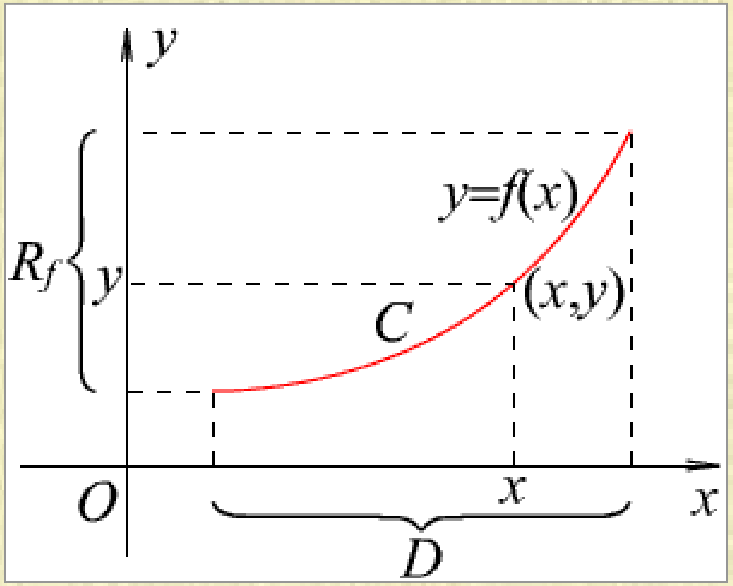
练习1：P17习题2.

❖函数的图形

坐标平面上的点集

$$\{(x, y) | y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形.

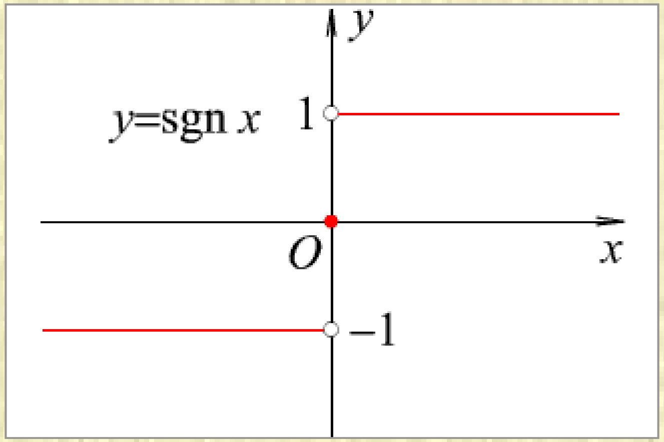


❖分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

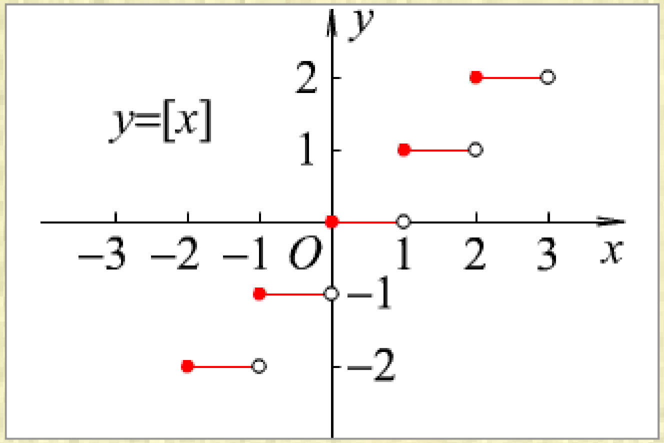
例2　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



例3　取整函数 $y=[x]$:

表示不超过 x 的最大整数.



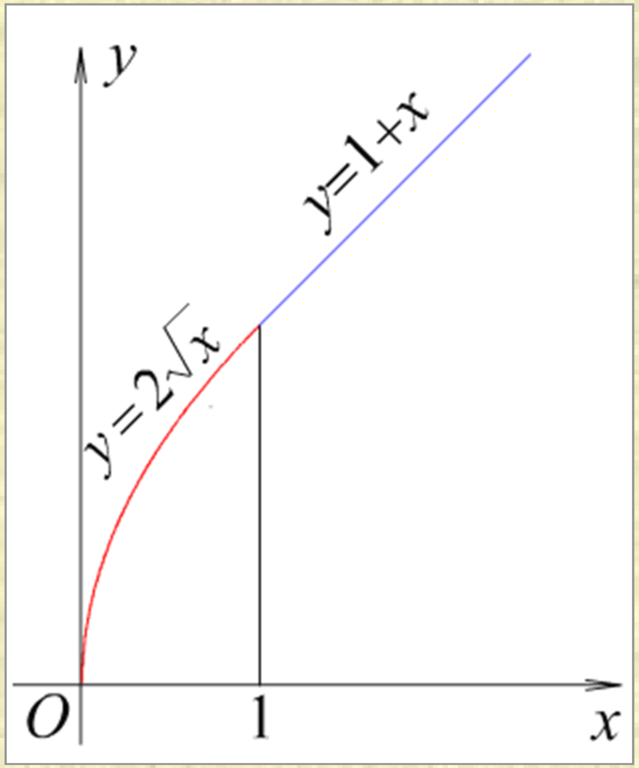
例4 函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$.

此函数的定义域为

$D=[0, 1]\cup(1, +\infty)=[0, +\infty)$.

当 $0\le x\le 1$ 时, $y=2\sqrt{x}$;

当 $x>1$ 时, $y=1+x$.



2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D, 数集 $X\subset D$.

如果存在数 K_1, 使对任一 $x\in X$, 有 $f(x)\leq K_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界.

如果存在数 K_2, 使对任一 $x\in X$, 有 $f(x)\geq K_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界.

如果存在正数 M, 使对任一 $x\in X$, 有 $|f(x)|\leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;

如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

注: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例5 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是否有上界?

解一 $f(x)<\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2}=(x+1)-x=1$

函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有上界1.

解二
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}<\frac{1}{2}$$

函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有上界 $\frac{1}{2}$.

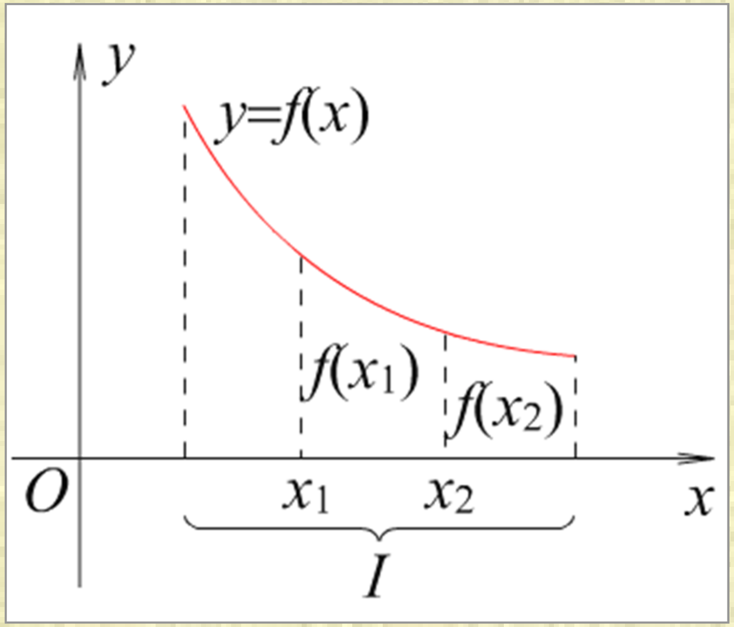
(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, x_1 及 x_2 为区间 I 上任意两点, 且 $x_1<x_2$.

如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的.

如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.



(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,

如果在 D 上有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果在 D 上有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

•奇偶函数举例

$y=x^2$, $y=\cos x$, $f(x)+f(-x)$ 都是偶函数.

$y=x^3$, $y=\sin x$, $f(x)-f(-x)$ 都是奇函数.

•奇偶函数的运算性质(P18习题6)

注: 常量函数为偶函数.

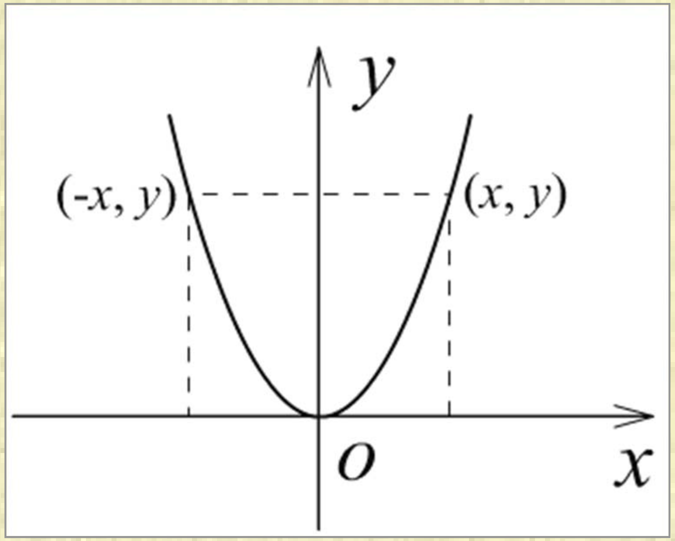
(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,

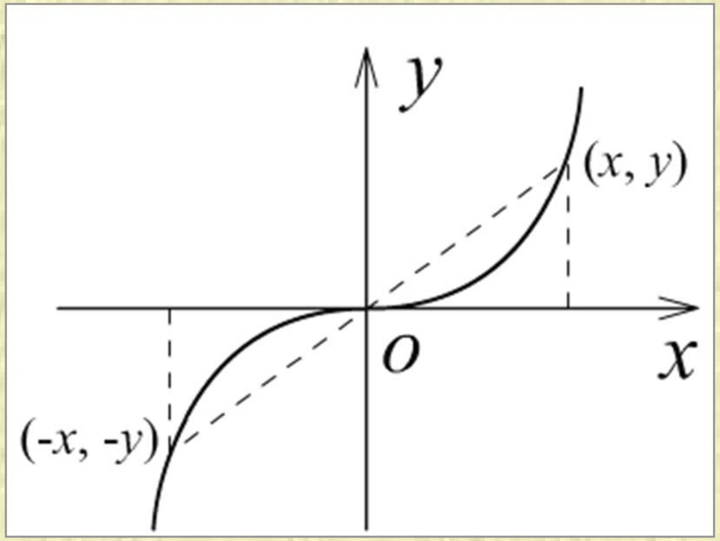
如果在 D 上有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果在 D 上有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

•奇偶函数的图形特点



偶函数的图形对称于 y 轴



奇函数的图形对称于原点

例6 判断 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

$\ln x=\log_e x, e=2.71828\Lambda$

解 $$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

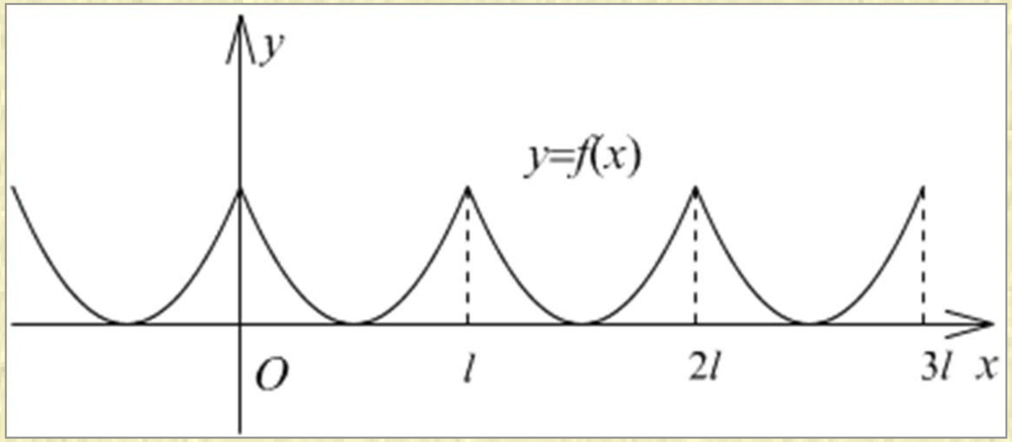
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l, 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

- 周期函数的图形特点



3. 反函数与复合函数

❖反函数

设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

按习惯, $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$.

例如, 函数 $y=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ 是单射, 所以它的反函数存在, 其反函数为

$$y=x^{\frac{1}{3}},\ x\in\mathbf{R}.$$

提问: 下列结论是否正确?

函数 $y=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ 的反函数是 $x=y^{\frac{1}{3}}$, $y\in\mathbf{R}$.

3. 反函数与复合函数

❖反函数

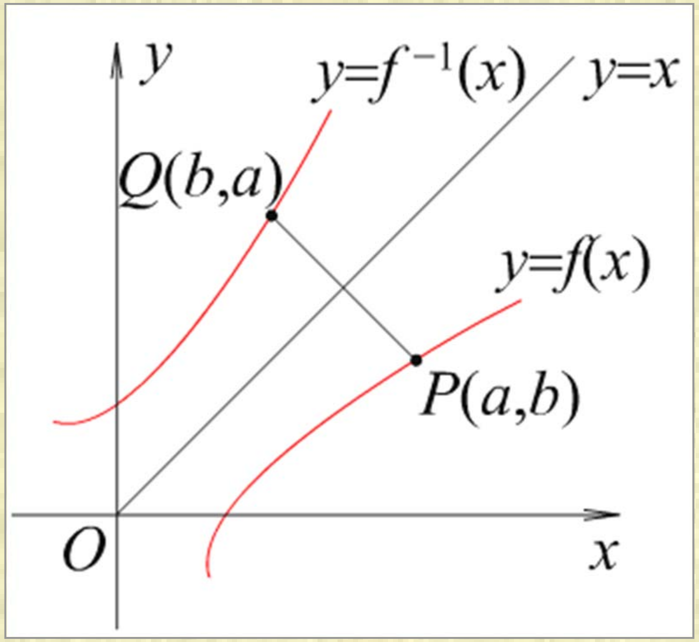
设函数 $f: D\rightarrow f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}: f(D)\rightarrow D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

按习惯, $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$.

函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.



提示:

$$b=f(a)$$

$$\Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

例7 求$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的反函数、值域.

解 令$u=e^x$，则有

$$y=\frac{u-u^{-1}}{u+u^{-1}}=\frac{u^2-1}{u^2+1}$$

$$yu^2+y=u^2-1,\quad u^2=\frac{1+y}{1-y}$$

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},\quad x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

所求反函数为 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

其定义域为$(-1,1)$, 即为所求值域.

例8 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{x+1}{x}$，求 $f[g(x)]$.

解 $$f[g(x)]=\frac{g(x)}{g(x)+1}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}+1}=\frac{x+1}{2x+1}$$

❖复合函数

函数 $y=f[g(x)]$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数, 变量 u 称为中间变量.

注：1. g 与 f 能构成复合函数的条件是: $R_g \cap D_f \neq \Phi$.
否则, 不能构成复合函数.

例9 分解下列复合函数:

$$(1)\ y=\sin^2 x;\ (2)\ y=\ln\cos\frac{1}{x};\ (3)\ y=x^{\sin x}.$$

解 (1) $y=u^2,\ \ u=\sin x$

(2) $y=\ln u,\ \ u=\cos v,\ \ v=\dfrac{1}{x}$

$$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$$

$$x=e^{\ln x}$$

(3) $y=(e^{\ln x})^{\sin x}=e^{\ln x\cdot\sin x}$

$y=e^u,\ \ u=\ln x\cdot\sin x$

例10 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}, g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解
$$f[g(x)]=\begin{cases} g(x), & g(x)<1 \\ \ln g(x), & g(x)\geq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^x, & e^x<1 \\ \ln e^x, & e^x\geq 1 \end{cases}=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ e^{\ln x}, & x\geq 1 \end{cases}=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geq 1 \end{cases}$$

4. 初等函数

❖基本初等函数

幂函数: $y=x^{\mu}$ ($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数);

指数函数: $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$);

对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$),

特别当 $a=e$ 时, 记为 $y=\ln x$;

三角函数: $y=\sin x$, $y=\cos x$,

$y=\tan x$, $y=\cot x$,

$y=\sec x$, $y=\csc x$;

反三角函数: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$,

$y=\arctan x$, $y=\text{arccot}\, x$. >>>

4. 初等函数

❖初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的函数, 称为初等函数.

例如, 函数

$$y=\sqrt{1-x^2}\ ,\quad y=\sin^2 x\ ,\quad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

都是初等函数.

提问: $y=|x|$ 是初等函数吗?

提示: $|x|=\sqrt{x^2}$

提问: 幂指函数 $y=x^{\sin x}$ 是初等函数吗? $y=(e^{\ln x})^{\sin x}$

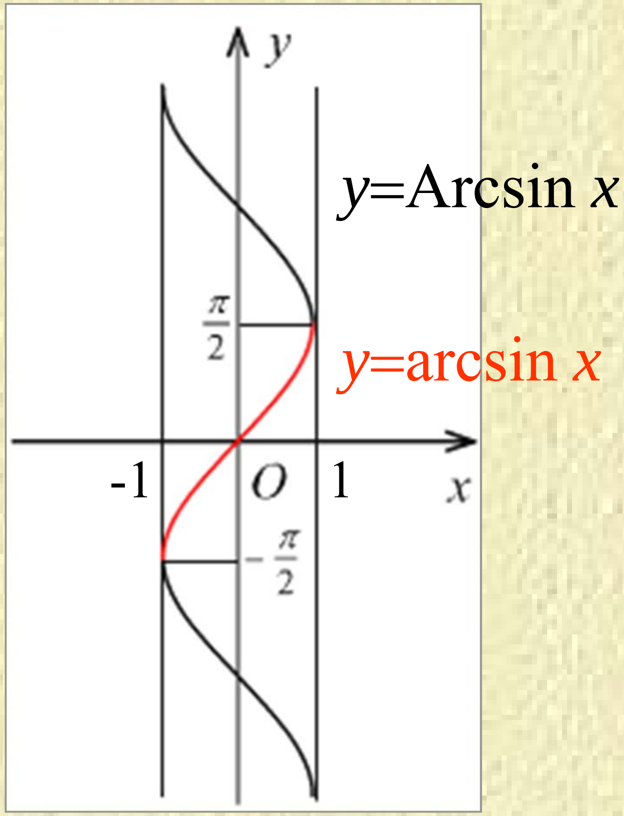
注: 用一个有限算式表示的函数是初等函数.

反三角函数

•反正弦函数

正弦函数y=sin x的反函数称为反正弦函数, 记为y=Arcsin x. 它是多值函数, 定义域为[−1, 1].

正弦函数 y=sin x 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上的反函数称为反正弦函数的主值，记为 y=arcsin x，其定义域为[−1, 1]，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

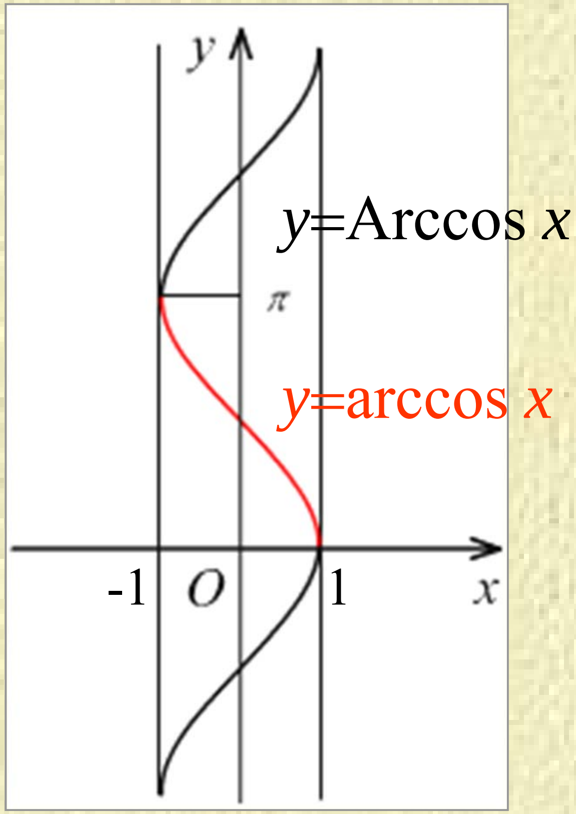


反三角函数

•反余弦函数

余弦函数y=cos x的反函数称为反余弦函数, 记为y=Arccos x. 它是多值函数, 定义域为[−1, 1].

余弦函数y=cos x 在[0, π]上的反函数称为反余弦函数的主值，记为 y=arccos x, 其定义域为[−1, 1], 值域为[0, π].

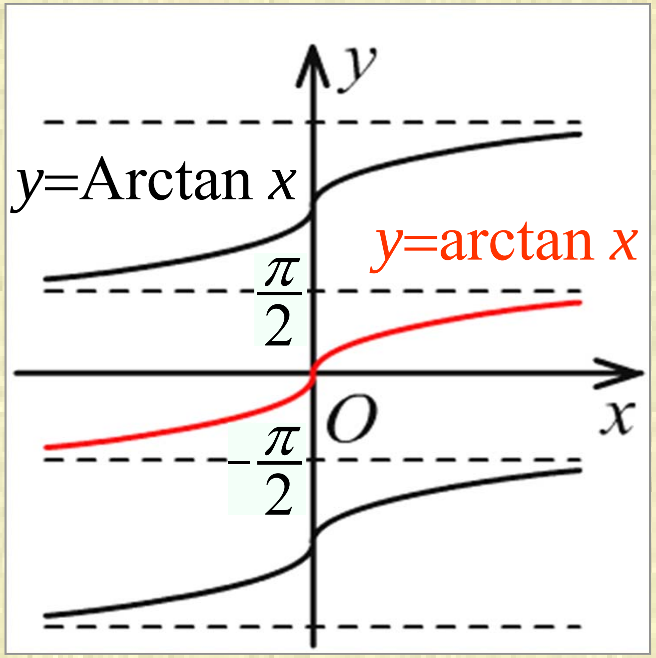


反三角函数

•反正切函数

正切函数$y=\tan x$的反函数称为反正切函数, 记为$y=\mathrm{Arctan}\, x$. 它是多值函数, 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

正切函数$y=\tan x$在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$上的反函数称为反正切函数的主值,记为 $y=\arctan x$, 其定义域为$(-\infty, +\infty)$, 值域为$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

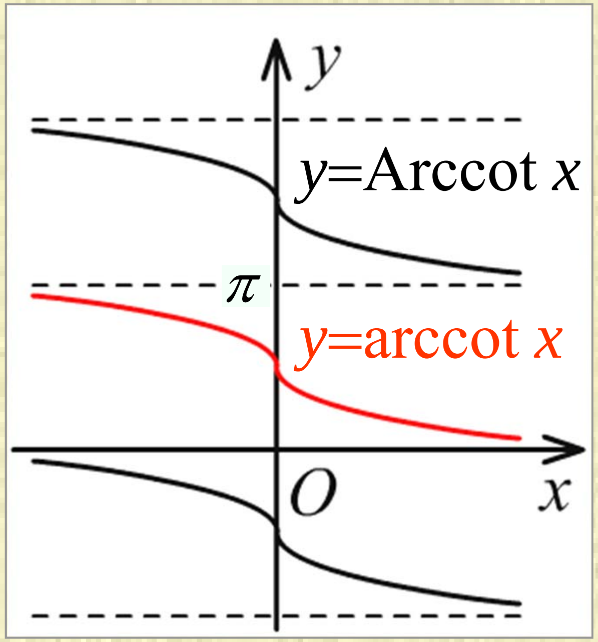


反三角函数

•反余切函数

余切函数y=cot x的反函数称为反余切函数, 记为y=Arccot x. 它是多值函数, 定义域为(−∞, +∞).

余切函数y=cot x 在 (0, π)上的反函数称为反余切函数的主值，记为y=arccot x, 其定义域为(−∞, +∞), 值域为(0, π).



•反三角函数值的确定

求arcsin x的方法是:

在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$内确定一点$\alpha$，使 $\sin\alpha=x$，则 $\arcsin x=\alpha$。

例如，求 $\arcsin(\frac{1}{2})$。

因为 $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，所以 $\arcsin(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$。

•反三角函数值的确定

求arccos x的方法是:

在$[0, \pi]$内确定一点α，使$\cos\alpha=x$， 则$\arccos x=\alpha$。

例如，求 $\arccos(-\frac{1}{2})$。

因为 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ ，所以 $\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$ 。

常用经济函数

1.单利与复利

单利计算公式 设初始本金为 p(元), 银行年利率为 r.

则第一年末本利和为 $S_1 = p + rp = p(1+r)$

则第二年末本利和为 $S_2 = p(1+r) + rp = p(1+2r)$

第 n 年末的本利和为 $\boxed{S_n = p(1+nr)}$

复利计算公式 设初始本金为 p (元), 银行年利率为 r. 则第一年末本利和 $S_1 = p + rp = p(1+r)$

则第二年末本利和 $S_2 = \underbrace{p(1+r)}_{\text{本金}} + \underbrace{rp(1+r)}_{\text{利息}}$

$= p(1+r)^2$

复利计算公式 设初始本金为 p (元)，银行年利率为 r. 则第一年末本利和 $S_1 = p + rp = p(1+r)$

则第二年末本利和 $S_2 = \underbrace{p(1+r)}_{\text{本金}} + \underbrace{rp(1+r)}_{\text{利息}}$

$$= p(1+r)^2$$

若 n 年末的本利和为 $\boxed{S_n = p(1+r)^n}$

多次付息

现在来讨论每年多次付息的情况.

单利付息情况　因每次的利息都不计入本金，故若一年分 n 次付息，则年末的本利和为

$$S = p(1 + n\frac{r}{n}) = p(1 + r)$$

即年末的本利和与支付利息的次数无关.

复利付息情况　因每次支付的利息都记入本金，故年末的本利和支付利息的次数是有关系的.

设初始本金为 p (元)，年利率为 r，若一年分 m 次付息，则一年末的本利和为

多次付息

设初始本金为 p (元), 年利率为 r, 若一年分 m 次付息, 则一年末的本利和为

$$S = p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$$

易见本利和是随 m 的增大而增加的. 而 n 年末的本利和为

$$\boxed{S_n = p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}$$

常用经济函数

1. **利息的计算**　设初始本金为 p (元)，银行年利率为 r，则第 n 年末的本利和

按单利计算　$\boxed{s_n = p(1+nr)}$

按复利计算　$\boxed{s_n = p(1+r)^n}$

若一年分 m 次付息，则第 n 年末的本利和为

按单利计算　$\boxed{s_n = p(1+nr)}$

按复利计算　$\boxed{s_n = p(1+\frac{r}{m})^{mn}}$

例11 一投资者欲用1000元投资5年，设年利率为6%，试分别按单利、复利、每年按4次复利计算到第5年末，该投资者应得的本利和 S.

解 按单利计算

$$S = 1000 + 1000 \times 0.06 \times 5 = 1300 \text{ (元)}.$$

按复利计算

$$S = 1000 \times (1 + 0.06)^5 = 1000 \times 1.33823$$

$$= 1338.23 \text{ (元)}.$$

按每年计算复利4次计算

$$S = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4\times 5} = 1000 \times 1.015^{20}$$

$$= 1000 \times 1.34686 = 1346.86 \text{ (元)}.$$

贴　现

票据的持有人，为在票据到期以前获得资金，从票面金额中扣除来到期期间的利息后，得到所余金额的现金称为**贴现**.

如果考虑贬值的因素，则在若干年后使用的**未来值**(相当于本利和）就有一个较低的**现值**.

例如，若银行年利率为7%，

则一年后的107元未来值的现值就是100元.

考虑更一般的问题：确定第 n 年后价值为 R 元钱的现值. 假设在这 n 年之间复利年利率 r 不变.

利用复利计算公式有 $R = p(1+r)^n$

贴 现

考虑更一般的问题：确定第 n 年后价值为 R 元钱的现值. 假设在这 n 年之间复利年利率 r 不变.

利用复利计算公式有 $R = p(1+r)^n$

得到第 n 年后价值为 R 元钱的现值为

$$\boxed{p = \frac{R}{(1+r)^n}}$$

式中 R 表示第 n 年后到期的**票据金额**，r 表示**贴现率**，而 p 表示现在进行票据转让时银行付给的**贴现金额**.

若票据持有者手中持有若干张不同期限及不同面额的票据，且每张票据的贴现率都是相同的， 则一次性向银行转让票据而得到的现金

$$\boxed{p = R_0 + \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \Lambda + \frac{R_n}{(1+r)^n}}$$

式中 R_0 为已到期的票据金额，R_n 为 n 年后到到期的票据金额. $\frac{1}{(1+r)^n}$ 称为**贴现因子**，它表示在贴金率 r 下 n 年后到期的1元钱的**贴现值**. 由它可给出不同年限及不同贴现率下的贴现因子表.

例12 某人手中有三张票据，其中一年后到期的票据金额是500元，二年后到期的是800元，五年后到期的是2000元，已知银行的贴现率6%，现在将三张票据向银行做一次性转让，银行的贴现金额是多少？

解 由贴现计算公式，贴现金额为

$$p=\frac{R_1}{(1+r)}+\frac{R_2}{(1+r)^2}+\frac{R_5}{(1+r)^5}$$

其中 $R_1=500,\ R_2=800,\ R_5=2000,\ r=0.06.$

故 $p=\dfrac{500}{(1+0.06)}+\dfrac{800}{(1+0.06)^2}+\dfrac{2000}{(1+0.06)^5}\approx 2678.21$ (元).

需求函数

需求函数 是指在某一特定时期内，市场上某种商品的各种可能的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系.

需求函数: $Q = f(P)$

其中，Q 表示需求量，P 表示价格.

需求函数的反函数 $P = f^{-1}(Q)$ 称为**价格函数**，习惯上将价格函数也统称为需求函数.

一般地，商品的需求量随价格的下降而增加，随价格的上涨而减少，因此，需求函数是单调减少函数.

供给函数

供给函数是指在某一特定时期内，　市场上某种商品的各种可能的供给量和决定这些供给量的诸因素之间的数量关系.

供给函数:　　$S = f(P)$

其中，S 表示供给量，P 表示价格.

一般地，　商品的供给量随价格的上涨而增加，随价格的下降而减少，　因此，　供给函数是单调增加函数.

市场均衡

对一种商品而言，如果需求量等于供给量，则这种商品就达到了**市场均衡**. 以线性需求函数和线性供给函数为例，

令 $Q_d = Q_s \implies aP + b = cP + d$

$$\implies P = \frac{d-b}{a-c} \equiv P_0$$

这个价格 P_0 称为该商品的**市场均衡价格**.

当市场价格高于均衡价格时，将出现**供过于求**的现象，而当市场价格低于均衡价格时，将出现**供不应求**的现象. 当市场均衡时有 $Q_d = Q_s = Q_0$，称 Q_0 为**市场均衡数量**.

例13 某种商品的供给函数和需求函数分别为

$$Q_s = 25P - 10, \quad Q_d = 200 - 5P$$

求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

解 由均衡条件 $Q_d = Q_s$ 得

$$200 - 5P = 25P - 10$$

$$\longrightarrow 30p = 210$$

$$\longrightarrow P_0 = 7$$

$$\longrightarrow Q_0 = 25P_0 - 10 = 165$$

即市场均衡价格为7，市场均衡数量为165.

成本函数

成本函数表示费用总额与产量(或销售量)之间的关系，产品成本可分为 固定成本和变动成本两部分.

成本函数:　$C = C(x) \quad (x \geq 0)$

其中，C 表示以货币计值的(总)成本，x 为产量.

当产量 $x = 0$ 时，对应的成本函数值 $C(0)$ 就是产品的固定成本值.

称 $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x} (x > 0)$

为单位成本函数或平均成本函数.

例14 某工厂生产某产品，每日最多生产200单位．它的日固定成本为150元，生产一个单位产品的可变成本为16元．求该厂日总成本函数及平均成本函数．

解 据 $C(x) = C_{固} + C_{变}$，可得总成本

$$C(x) = 150 + 16x, \quad x \in [0,200]$$

平均成本 $$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 16 + \frac{150}{x}.$$

收入函数与利润函数

销售某种商品的收入 R，等于商品的单位价格 P 乘以销售量 x，即 $R = P \cdot x$，

称其为**收入函数**．而销售利润 L 等于收入 R 减去成本 C，即 $L = R - C$，

称其为**利润函数**

当 $L = R - C > 0$ 时，生产者盈利；

当 $L = R - C < 0$ 时，生产者亏损；

当 $L = R - C = 0$ 时，生产者盈亏平衡；

使 $L(x) = 0$ 的点 x_0 称为**盈亏平衡点**(又称为**保本 点**)．

例15 某工厂生产某产品年产量为 x 台，每台售价500元，当年产量超过800台时，超过部分只能按9折出售. 这样可多售出200台，如果再多生产，本年就销售不出去了. 试写出本年的收益(入)函数.

解 因为产量超过800台时售价要按9折出售，又超过1000台(即800台+200台)时，多余部分销售不出去,从而超出部分无收益. 因此，要把产量分三阶段来考虑. 依题意有

例16 某工厂生产某产品年产量为 x 台，每台售价500元，当年产量超过800台时，超过部分只能按9折出售. 这样可多售出200台，如果再多生产，本年就销售不出去了. 试写出本年的收益(入)函数.

依题意有

$$R(x)=\begin{cases} 500x & 0\le x\le 800 \\ 500\times 800+0.9\times 500(x-800), & 800<x\le 1000 \\ 500\times 800+0.9\times 500\times 200, & x>1000 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 500x, & 0\le x\le 800 \\ 400000+450(x-800), & 800<x\le 1000. \\ 490000, & x>1000 \end{cases}$$

例17 已知某厂生产单位产品时, 可变成本为15元, 每天的固定成本为2000元, 如这种产品出厂价为20元, 求

(1) 利润函数;

(2) 若不亏本, 该厂每天至少生产多少单位这种产品.

解 (1) 因为 $L(x) = R(x) - C(x)$,

$$C(x) = 2000 + 15x,$$

$$R(x) = 20x,$$

所以 $L(x) = 20x - (2000 + 15x) = 5x - 2000.$

(2) 当 $L(x) = 0$ 时, 不亏本, 于是有

$$5x - 2000 = 0,$$

得 $x = 400$ (单位).

例18 某电器厂生产一种新产品，在定价时不单是根据生产成本而定，还要请各消费单位来出价，即他们愿意以什么价格来购买. 根据调查得出需求函数为

$$x=-900P+45000.$$

该厂生产该产品的固定成本是270000元，而单位产品的变动成本为10元. 为获得最大利润，出厂价格应为多少?

解 以 x 表示产量, C 表示成本, P 为价格，则有

$$C(x)=10x+270000.$$

而需求函数为 $x=-900P+45000,$

代入 $C(x)$ 中得 $C(P)=-9000P+720000.$

收入函数为 $R(P)=P\cdot(-900P+45000)$

$$=-900P^2+45000P.$$

解 以 x 表示产量，C 表示成本，P 为价格，则有

$$C(x)=10x+270000.$$

而需求函数为 $x=-900P+45000,$

代入$C(x)$中得 $C(P)=-9000P+720000.$

收入函数为 $R(P)=P\cdot(-900P+45000)$

$$=-900P^2+45000P.$$

利润函数为

$$L(P)=R(P)-C(P)=-900(P^2-60p+800)$$

$$=-900(P-30)^2+90000.$$

由于利润是一个二次函数，容易求得，求价格 $P=30$ 元时，利润 $L=90000$ 元为最大利润.

内容小结

1. **利息的计算** 设初始本金为 p (元)，银行年利率为 r，则第 n 年末的本利和

按单利计算 $\boxed{s_n = p(1+nr)}$

按复利计算 $\boxed{s_n = p(1+r)^n}$

若一年分 m 次付息，则第 n 年末的本利和为

按单利计算 $\boxed{s_n = p(1+nr)}$

按复利计算 $\boxed{s_n = p(1+\frac{r}{m})^{mn}}$

内容小结

2. **贴现**　设在考察的 n 年间复利年利率 r 不变，则第 n 年后价值为 R 元钱的贴现金额为

$$\boxed{p=\frac{R}{(1+r)^n}}$$

3. **常用经济函数**　如需求函数、供给函数、成本函数、收入函数与利润函数等.

需求函数　$Q=f(P)$

供给函数　$S=f(P)$

成本函数　$C=C(x)(x\geq 0)$

内容小结

单位成本函数或**平均成本函数** $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}(x\ge 0).$

收入函数 $R=P\cdot x$，其中，R 表示销售收入，P 表示价格，x 表示销售量.

利润函数 $L=R-C$，其中，L 表示销售利润，R 表示销售收入，C 表示生产成本.

作 业

习题1–1 (P17):

1.单号

习题1–2 (P26):

1.　　5.　　7.

习题1–3 (P34):

3.　　9.