§1.11 闭区间上连续函数的性质

一、有界性与最大值最小值定理

二、零点定理与介值定理

一、有界性与最大值最小值定理

❖最大值与最小值

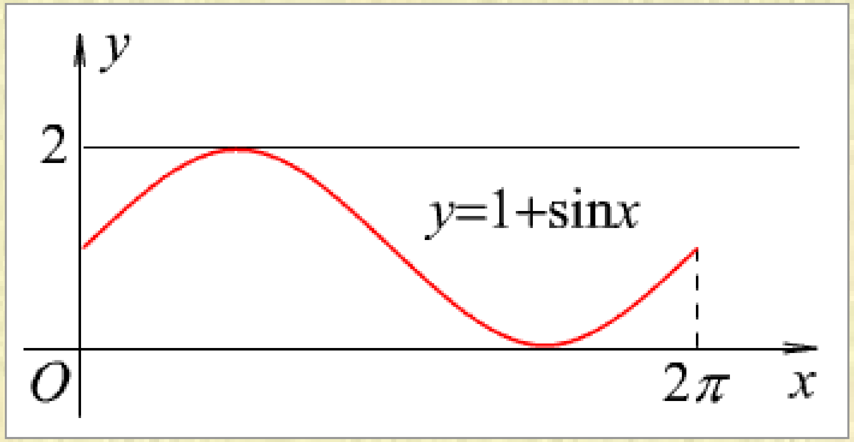
对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大值(最小值).

最大值与最小值举例:

函数 $f(x)=1+\sin x$在区间$[0, 2\pi]$上有最大值 2 和最小值 0 .



一、有界性与最大值最小值定理

❖最大值与最小值

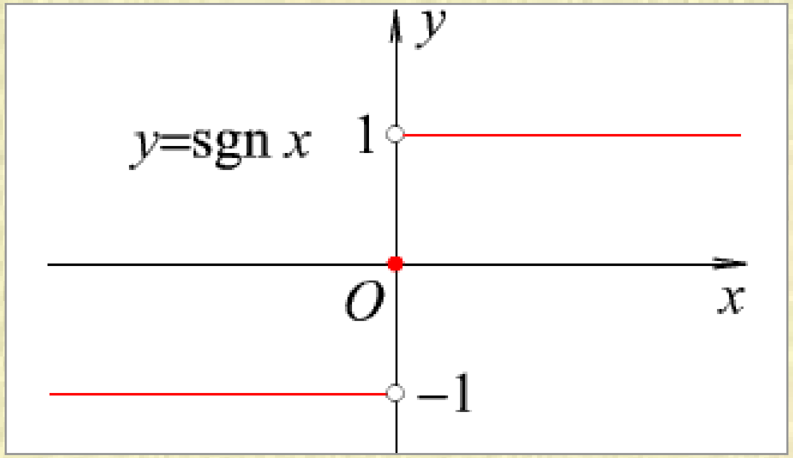
对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大值(最小值).

最大值与最小值举例:

函数$y=\text{sgn}\, x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内有最大值1和最小值-1. 但在开区间$(0, +\infty)$内, 它的最大值和最小值都是1.



一、有界性与最大值最小值定理

❖最大值与最小值

对于在区间I上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$都有

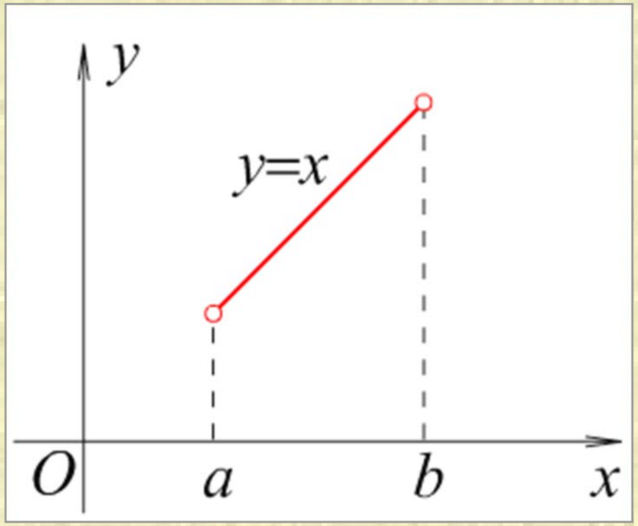
$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大值(最小值).

应注意的问题:

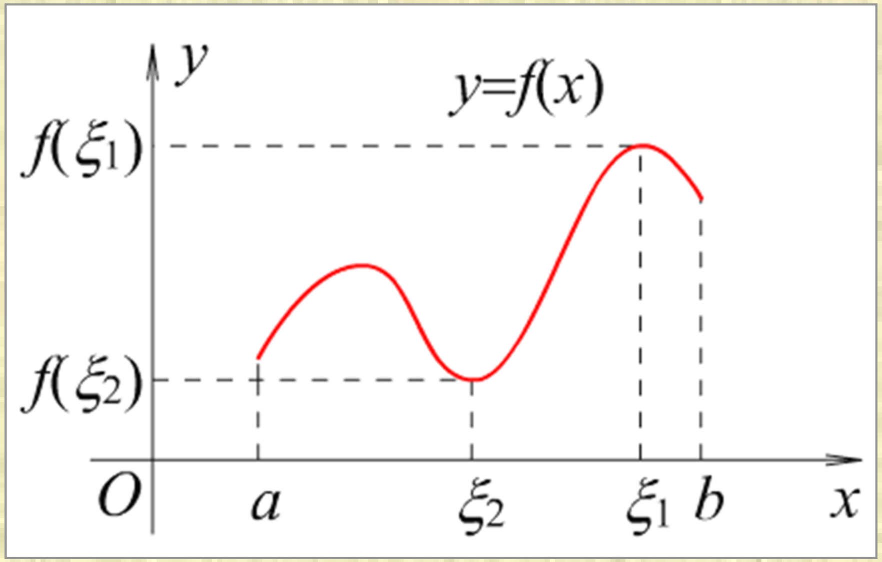
并非任何函数都有最大值和最小值.

例如，函数$f(x)=x$在开区间(a, b)内既无最大值又无最小值.



❖定理1(最大值和最小值定理)

在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.



说明:

定理说明, 如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 那么至少有一点$\xi_1 \in [a, b]$, 使$f(\xi_1)$是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值, 又至少有一点$\xi_2 \in [a, b]$, 使$f(\xi_2)$是$f(x)$在$[a, b]$上的最小值.

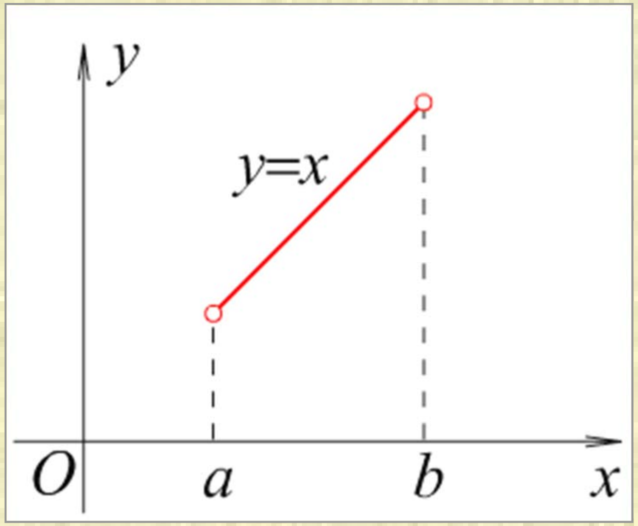
❖定理1 (最大值和最小值定理)

在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

应注意的问题:

如果函数仅在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点, 那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

例如, 函数$f(x)=x$在开区间(a, b)内既无最大值又无最小值.



❖定理1 (最大值和最小值定理)

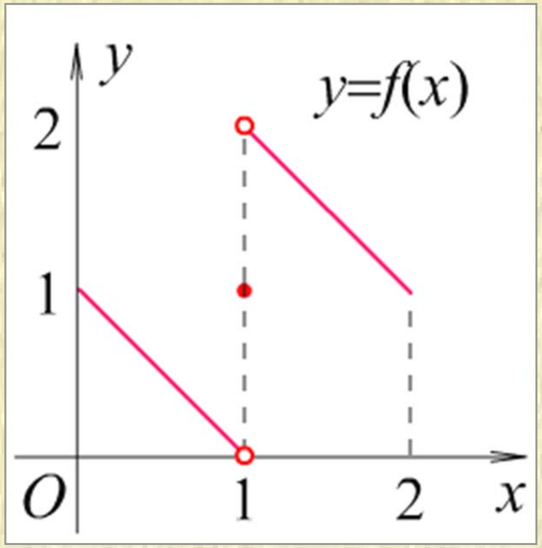
在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

应注意的问题:

如果函数仅在开区间内连续, 或函数在闭区间上有间断点, 那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

又如, 如下函数在闭区间[0, 2]内既无最大值又无最小值.

$$y=f(x)=\begin{cases} -x+1 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \\ -x+3 & 1<x\le 2 \end{cases}.$$



❖定理1(最大值和最小值定理)

在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

❖定理2(有界性定理)

在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证明　设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续.

根据定理1，存在$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值M和最小值m，使任一$x\in[a, b]$满足

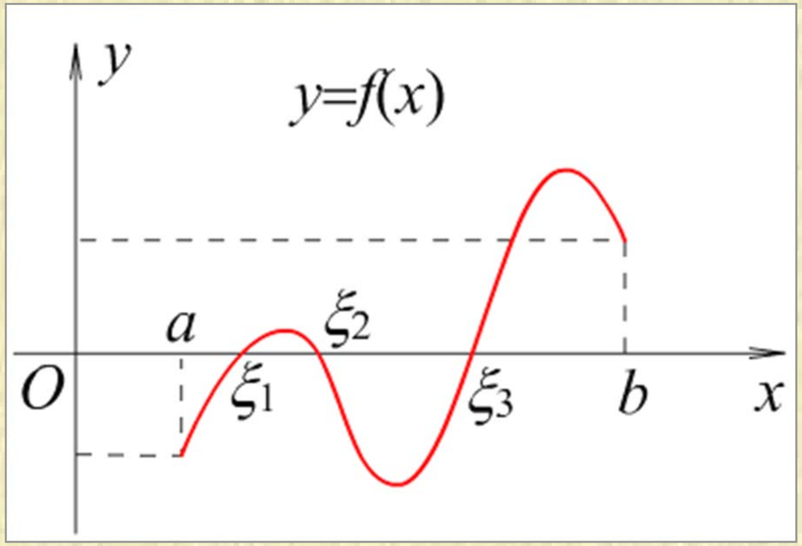
$$m\leq f(x)\leq M.$$

上式表明，$f(x)$在$[a, b]$上有上界M和下界m，因此函数$f(x)$在$[a, b]$上有界.

二、零点定理与介值定理

❖定理3(零点定理)

设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号, 那么在开区间(a, b)内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=0$.



注:

如果x_0使$f(x_0)=0$，则x_0称为函数$f(x)$的零点.

二、零点定理与介值定理

❖定理3(零点定理)

设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号, 那么在开区间(a, b)内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=0$.

例1 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0, 1)$内至少有一个根.

证明 设 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上连续,

并且 $$f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0.$$

根据零点定理, 在$(0, 1)$内至少有一点ξ, 使得 $f(\xi)=0$,

即 $$\xi^3-4\xi^2+1=0\ .$$

这说明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0, 1)$内至少有一个根是ξ.

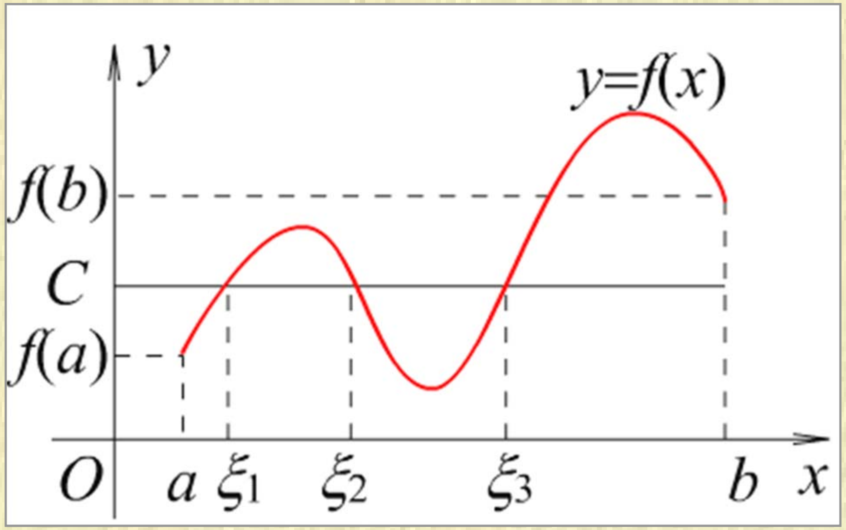
二、零点定理与介值定理

❖定理3(零点定理)

设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号, 那么在开区间(a, b)内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=0$.

❖定理4(介值定理)

设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)\neq f(b)$, 那么, 对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个数C, 在开区间(a, b)内至少有一点ξ, 使得$f(\xi)=C$.



二、零点定理与介值定理

❖定理3(零点定理)

设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)$与$f(b)$异号, 那么在开区间(a, b)内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=0$.

❖定理4(介值定理)

设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且$f(a)\neq f(b)$, 那么, 对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意一个数C, 在开区间(a, b)内至少有一点ξ, 使得$f(\xi)=C$.

•推论

在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

作 业

习题1–11 (P78):

3.