§1.4 数列的极限

一、数列极限的定义

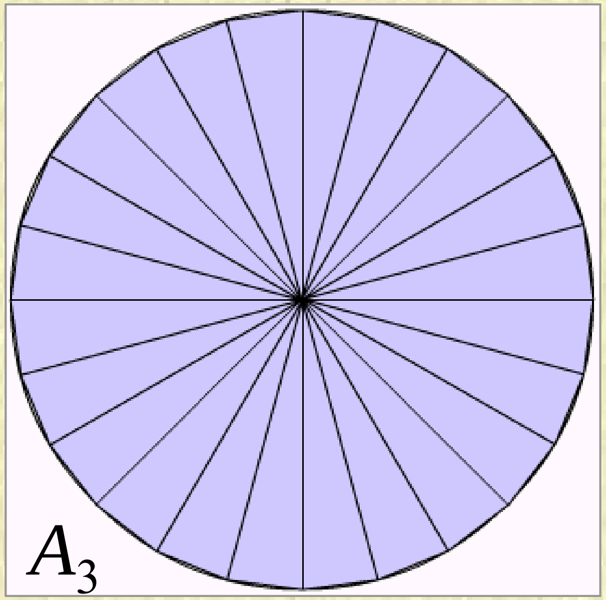
二、收敛数列的性质

一、数列极限的定义

❖引例

如何用渐近的方法求圆的面积S?

用圆内接正多边形的面积近似圆的面积S.



A_1表示圆内接正6边形面积,

A_2表示圆内接正12边形面积,

A_3表示圆内接正24边形面积,

$\cdots\cdots$,

A_n表示圆内接正$6\times 2^{n-1}$边形面积,

$\cdots\cdots$.

显然n越大, A_n越接近于S.

数列的定义

定义　按一定次序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \Lambda\ x_n, \Lambda$ 称为无穷数列，简称**数列**. 可简记为$\{x_n\}$.其中的每个数称为数列的项，x_n 称为**通项**(一般项).

数列举例：

$$2,4,8,\Lambda\ ,2^n,\Lambda\ ; \qquad \{2^n\}.$$

$$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\Lambda\ ,\frac{n-1}{n},\Lambda\ ; \qquad \{\frac{n-1}{n}\}.$$

$$1,-1,1,\Lambda\ ,(-1)^{n+1},\Lambda\ ; \qquad \{(-1)^{n+1}\}.$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\Lambda\ ,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\Lambda\ ; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}.$$

❖数列极限的通俗定义

当n无限增大时，如果数列$\{x_n\}$的一般项x_n**无限接近**于**常数**a，则常数a称为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ .$$

例如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1$$

例1 考察数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots$ 的变化趋势.

通项公式 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$. $|x_n-1|=\frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}x_n=1$:

问题:当 n 无限增大时, $\{x_n\}$ 是否无限接近于某一确定的数值? 如何用数学语言刻画"无限接近".

当n无限增大时, x_n无限接近于a.

$\Leftrightarrow$ 当n增大到一定程度以后, $|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数.

给定 $\frac{1}{100}$, 只要 $n>100$时, 有 $|x_n-1|<\frac{1}{100}$,

给定 $\frac{1}{1000}$, 只要 $n>1000$时, 有 $|x_n-1|<\frac{1}{1000}$,

给定 $\varepsilon>0$, 只要 $n>N(=[\frac{1}{\varepsilon}])$时, 有 $|x_n-1|<\varepsilon$成立.

数列的极限

当n无限增大时，x_n无限接近于a.

⇔ 当n增大到一定程度以后，$|x_n-a|$能小于事先给定的任意小的正数.

引进记号: $\forall$ --- 对每一个或任给的; $\exists$ --- 存在.

数列$\{x_n\}$无限接近数 a 的数学描述:

$\forall \varepsilon > 0$, 是否 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

❖数列极限的精确定义

设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于任意给定的正数ε, 总存在正整数N, 使得当$n>N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限, 或者称数列$\{x_n\}$收敛于a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \ (n\to\infty).$$

注: 当n无限增大时, x_n无限接近于a.

$\Leftrightarrow$ 当n增大到一定程度以后, $|x_n - a|$能小于事先给定的任意小的正数.

❖数列极限的精确定义

设$\{x_n\}$为一数列, 如果存在常数a, 对于任意给定的正数ε, 总存在正整数N, 使得当$n>N$时, 不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立, 则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限, 或者称数列$\{x_n\}$收敛于a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数a, 就说数列$\{x_n\}$没有极限, 或说数列$\{x_n\}$是发散的, 习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

•极限定义的简记形式

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}^+, \text{当}n>N\text{时}, \text{有}|x_n-a|<\varepsilon.$$

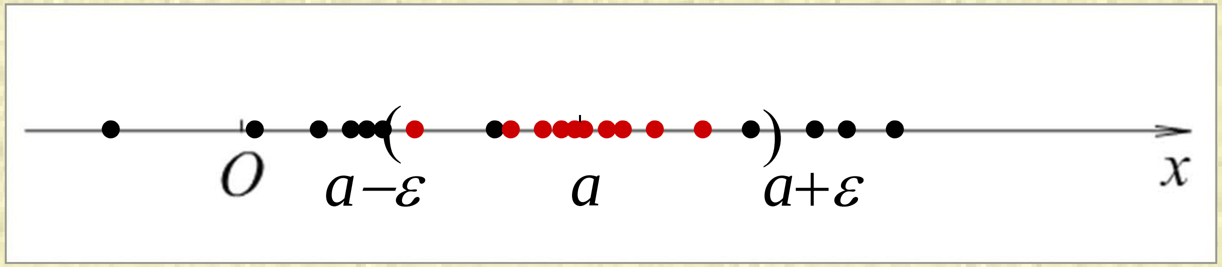
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

❖数列极限的几何意义

□任意给定 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,

•存在 $N \in \mathrm{N}^+$, 当 $n < N$ 时, 点 x_n 可能落在邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内,

•当 $n > N$ 时, 点 x_n 全都落在邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内:



注: N 与 ε 有关, 但不唯一.

确定 N 时, N 越大越合适.

例2 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

证明 $|x_n - 1| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$, 要$|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要$\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即$n > \frac{1}{\varepsilon}$,

取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, 就有$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$

所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

注: 当 $\varepsilon>1$ 时, $[\varepsilon^{-1}]=0$.
此时, 可取 N 为任一正整数.

例3 设$0<|q|<1$, 证明等比数列

$$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

的极限是0.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 要使$|x_n-0|<\varepsilon$, 即要$|q|^{n-1}<\varepsilon$,

即 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$, 亦即 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

取$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 当 $n>N$ 时, 就有$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$

故 $\lim_{n\to\infty} q^{n-1}=0$

注: 当 $\varepsilon>1$ 时, $[1+\log_{|q|}\varepsilon]<1$,

取 $N=1$. 这种情形, 不再一一说明.

例4 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n}=0.$

证一 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon}]$

当 $n>N$ 时, 就有 $|\frac{n+2}{n^2+n}-0|<\varepsilon$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n}=0.$

注:直接解不等式 $|x_n-0|<\varepsilon$ 得 $n>\frac{1-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+6\varepsilon+1}}{2\varepsilon}$

例4 证明 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2+n} = 0.$

证二 $|x_n - 0| = \left|\dfrac{n+2}{n^2+n}\right| < \dfrac{2n+2}{n^2+n} = \dfrac{2}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$, 要$|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要$\dfrac{2}{n} < \varepsilon$, 即$n > \dfrac{2}{\varepsilon}$,

取 $N = [\dfrac{2}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 就有$\left|\dfrac{n+2}{n^2+n} - 0\right| < \dfrac{2}{n} < \varepsilon$

所以 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2+n} = 0.$

注: N 与 ε 有关, 但不唯一. 确定 N 时, N 越大越合适.

例5 设 $x_n = \dfrac{n+\sin n}{n+1}$. 观察 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ __ ?取 $N=$ __ , 可使当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-1|<0.001$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

$$|x_n-1| = \left|\frac{n+\sin n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{\sin n-1}{n+1}\right| \le \frac{2}{n+1}$$

要$|x_n-1|<0.001$, 只要$\dfrac{2}{n+1}<0.001$, 求得$n>1999$

取$N=1999$, 可使当$n>N$时, 有$|x_n-1|<0.001$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}^+$, 当$n>N$时, 有$|x_n-a|<\varepsilon$.

❖关于$\varepsilon-N$语言论证法

1. 若解不等式$|x_n-a|<\varepsilon$可得出$n>\varphi(\varepsilon)$, 取$N=[\varphi(\varepsilon)]$. >>>

2. 若不等式$|x_n-a|<\varepsilon$不易解时, 采取放大技巧:

$$|x_n-a|<f(n).$$

所取的$f(n)$要使得不等式$f(n)<\varepsilon$容易解出$n>\varphi(\varepsilon)$.

取$N=[\varphi(\varepsilon)]$. >>> 例6

注: 1. N与ε有关, 但不唯一. 确定N时, N越大越合适.

2. 当$[\varphi(\varepsilon)]<1$时, 可取N为任一正整数.

例6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$$

证明 记$a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0\ (n > 1)$

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 + \Lambda > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$a_n^2 < \frac{2}{n},\quad a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, 即$a_n < \varepsilon$, 只要$\sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$, 即$n > \frac{2}{\varepsilon^2}$,

取$N = [\frac{2}{\varepsilon^2}]$, 当$n > N$时, 有$|\sqrt[n]{n} - 1| = a_n < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

二、收敛数列的性质

❖定理1（极限的唯一性）

如果数列$\{x_n\}$收敛, 那么它的极限唯一.

证明 假设同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a<b$.

按极限的定义, 对于 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$, 存在充分大的正整数 N, 使当$n>N$时, 同时有

$$|x_n-a|<\varepsilon=\frac{b-a}{2} \text{ 及} |x_n-b|<\varepsilon=\frac{b-a}{2},$$

因此同时有

$$x_n<\frac{b+a}{2} \text{ 及 } x_n>\frac{b+a}{2},$$

这是不可能的. 所以只能有$a=b$.

二、收敛数列的性质

❖定理1 (极限的唯一性)

如果数列$\{x_n\}$收敛, 那么它的极限唯一.

❖定理2 (收敛数列的有界性)

如果数列$\{x_n\}$收敛, 那么数列$\{x_n\}$一定有界.

注:

如果$\exists M>0$, $\forall n\in \mathbf{N}^+$, 有$|x_n|\le M$, 则称数列$\{x_n\}$是有界的; 如果这样的正数$M$不存在, 就说数列$\{x_n\}$是无界的.

二、收敛数列的性质

❖定理1（极限的唯一性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

❖定理2（收敛数列的有界性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

证明　设数列$\{x_n\}$收敛于a. 则 $\exists N\in\mathbf{N}^+$，当$n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<1(=\varepsilon).$$

于是当$n>N$时，

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\le|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\}$，$\forall n\in\mathbf{N}^+$，有$|x_n|\le M$.

这就证明了数列$\{x_n\}$是有界的.

二、收敛数列的性质

❖定理1（极限的唯一性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

❖定理2（收敛数列的有界性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

•讨论

1. 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界. 发散的数列是否一定无界？有界的数列是否收敛？

2. 数列$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$的有界性与收敛性如何？

二、收敛数列的性质

❖定理1（极限的唯一性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

❖定理2（收敛数列的有界性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

❖定理3（收敛数列的保号性）

如果数列$\{x_n\}$收敛于a，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数N，当$n>N$时，有$x_n>0$(或$x_n<0$).

•推论

如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n \geq 0$(或$x_n \leq 0$)，且数列$\{x_n\}$收敛于a，那么$a \geq 0$(或$a \leq 0$).

❖定理4 (收敛数列与其子数列间的关系)

如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

注:

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列.

例如, 数列$\{x_n\}$: $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}\cdots$的一个子数列为$\{x_{2n}\}$: $-1, -1, -1, \cdots, (-1)^{2n+1}\cdots$.

❖定理4（收敛数列与其子数列间的关系）

如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

•讨论

1. 数列的子数列如果发散，原数列是否发散?

2. 数列的两个子数列收敛，但其极限不同，原数列的收敛性如何?

3. 发散的数列的子数列都发散吗?

4. 如何判断数列$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$是发散的?

作 业

习题1–4 (P40):

1.

2.(2) （3）