§1.9 无穷小的比较

❖观察与比较

观察两个无穷小比值的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小比值的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度.

在$x\to 0$的过程中，x^2比$3x$趋于零的速度快些，反过来$3x$比x^2趋于零的速度慢些，而$\sin x$与x趋于零的速度相仿.

❖无穷小的阶

设α及β为同一个自变量的变化过程中的无穷小.

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$.

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小.

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$, $k>0$，就说β是关于α的k阶无穷小.

如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

❖阶的比较举例

例1 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x}=0$,

所以当$x\to 0$时, $3x^2$是比x高阶的无穷小, 即$3x^2=o(x)(x\to 0)$.

例2 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$,

所以当$x\to 3$时, x^2-9与$x-3$是同阶无穷小.

例3 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,

所以当$x\to 0$时, $1-\cos x$ 是关于x 的二阶无穷小.

例4 证明：当 $x \to 0$ 时，$4x\tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^3 = 4.$

故当 $x \to 0$ 时，$4x\tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

例5 当 $x \to 0$ 时，求 $\tan x - \sin x$ 关于 x 的阶数.

解 $\Theta \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

❖等价无穷小

例6 证明:当$x \to 0$时,$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x.$

证明 因为$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1,$

因此,当$x \to 0$时,$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x.$

例7 证明:当$x \to 0$时,$(1+x)^n - 1 \sim nx$.

证明 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{n}[(1+x)^{n-1} + \cdots + (1+x) + 1]$$

$$= 1,$$

因此,当$x \to 0$时,$(1+x)^n - 1 \sim nx$.

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

例7 证明:当$x \to 0$时,$(1+x)^n - 1 \sim nx.$

证明 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n - 1}{nx}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{n}[(1+x)^{n-1} + \cdots + (1+x) + 1]$$

$$= 1,$$

因此, 当$x \to 0$时,$(1+x)^n - 1 \sim nx.$

注: 可以证明, 对任意非零数 μ 有

$$\boxed{(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x \quad (x \to 0).}$$

常用等价无穷小

根据等价无穷小的定义，可以证明，当 $x \to 0$ 时，

有下列常用等价无穷小关系：

$\sin x \sim x$ $\qquad$ $\tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$ $\qquad$ $\arctan x \sim x$ $\qquad$ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x) \sim x$ $\qquad$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \,(\alpha \in R)$

$e^x - 1 \sim x$ $\qquad$ $a^x - 1 \sim x\ln a \;(a > 0)$

注：当 $x \to 0$ 时，x 为无穷小，在常用等价无穷小中，用任意一个无穷小 $\beta(x)$ 代替 x，等价关系依然成立.

❖关于等价无穷小的定理

• 定理1

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

证明 必要性: 设 $\alpha\sim\beta$, 只需证 $\beta-\alpha=o(\alpha)$. 因为

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

所以 $\beta-\alpha=o(\alpha)$.

充分性: 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left[1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right]=1,$$

因此 $\alpha\sim\beta$.

❖关于等价无穷小的定理

• 定理1

β与α是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

例8 因为当 $x\to 0$ 时 $\sin x \sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$,

所以当$x\to 0$时, 有

$$\sin x=x+o(x),$$

$$\tan x=x+o(x),$$

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

❖关于等价无穷小的定理

• **定理1**

β与α是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

• **定理2**

设$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$, 且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在, 则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}$

$$=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

❖关于等价无穷小的定理

• **定理1**

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

• **定理2**

设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理2的意义:

求两个无穷小比值的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替．因此，如果用来代替的无穷小选取得适当，则可使计算简化．

若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

例9 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当$x \to 0$时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

例10 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}$.

解 当$x \to 0$时$\sin x \sim x$，无穷小x^3+3x与它本身显然是等价的，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3}.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{1/3}-1}{\cos x-1}$.

解 当 $x\to 0$ 时，

$$(1+x^2)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}x^2,\quad \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{1/3}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

例12 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}=1.$$

注: 当$x\to 0$时,有

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\neq 0).$$

例12 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-1}$.

错解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{\frac{1}{2}x^2\sin x}$$

$$=0.$$

注: 计算极限时,无穷小在乘除运算中可以作等价无穷小代换, 但在加减运算中不可.

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解 $\because$ $\tan 5x = 5x + o(x)$,

$\sin 3x = 3x + o(x)$,

$1-\cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$$\therefore \quad \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{3x+o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{o(x)}{x}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x}}{3+\dfrac{o(x)}{x}} = \frac{5}{3}.$$

作 业

习题1–9 (P67):

5. (1)(2)(3)(6)