§2.1 导数概念

一、引例

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的可导性与连续性的关系

一、引例

1. 直线运动的速度

设位置函数为 $s=f(t)$.

在时间段 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻 t_0 的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

一、引例

2. 切线问题

切线 —— 割线的极限位置

定点 $M(x_0, f(x_0))$, 动点 $N(x, f(x))$.

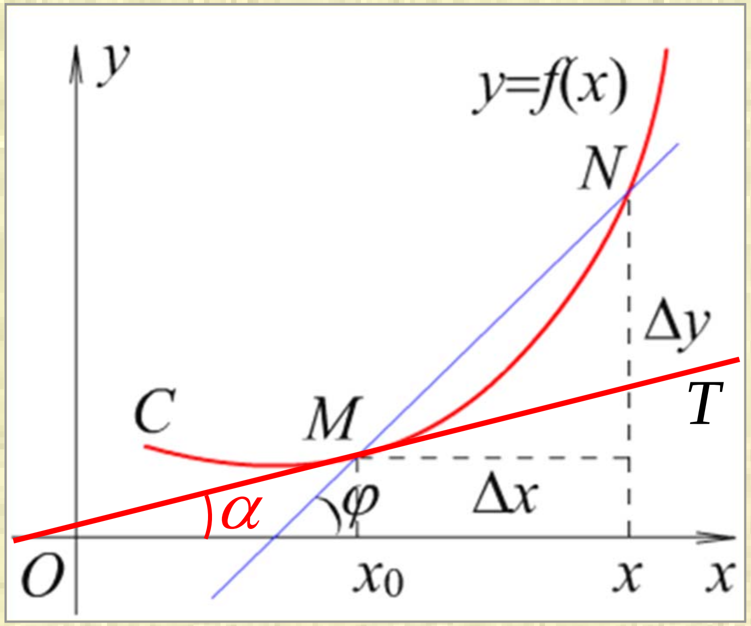
$$N \to M \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = x - x_0 \to 0$$

动画演示

切线 MT 的斜率

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{MT} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



一、引例

1. 直线运动的速度

设位置函数为 $s=f(t)$，则物体在时刻 t_0 的**瞬时速度**

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

2. 切线的斜率

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,\ f(x_0))$ 处的**切线的斜率**

$$k_{MT}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

共性：所求量为**函数增量与自变量增量之比的极限**.

$\boxed{\text{函数的变化率 —— 导数}}$

二、导数的定义

1. 函数在一点处的导数与导函数

❖导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果上述极限不存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

函数的变化率 —— 导数

导数的定义式: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

例1 设 $f(x)=g(x)(x^2-x_0{}^2)$，$g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，求 $f'(x_0)$.

解 $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)(x^2-x_0{}^2)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)(x+x_0)=2x_0g(x_0).$$

导数的定义式: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- 导函数的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内每一点 x 都对应一个导数值, 则这一对应关系所确定的函数称为函数 $y=f(x)$ 的导函数, 简称导数, 记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ 或\ \frac{df(x)}{dx}.$$

- 导数的其它符号

$$y'|_{x=x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\ 或\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

导函数的定义式: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

•导函数的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内每一点 x 都对应一个导数值, 则这一对应关系所确定的函数称为函数 $y=f(x)$ 的导函数, 简称导数, 记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \text{或}\ \frac{df(x)}{dx}.$$

•导数的其它符号

$$y'|_{x=x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}\ \text{或}\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

导函数的定义式: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

变量 y 对变量x 的变化率: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- 瞬时速度: $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

  单位时间内物体经过的路程

- 冷却速度: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta t}$

  单位时间内物体温度的下降量

- 衰变速度: $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta M}{\Delta t}$

  单位时间内放射性元素放射的原子质量

导函数的定义式: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

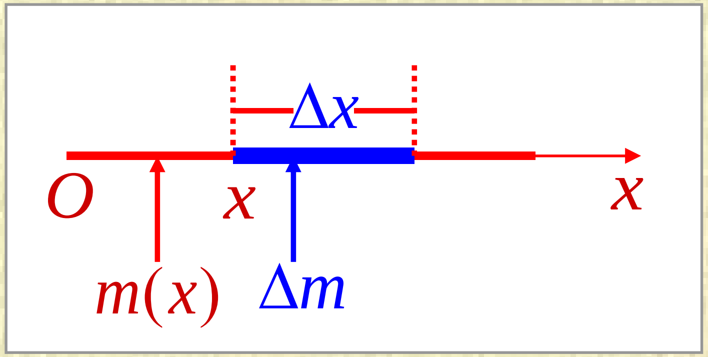
变量 y 对变量x 的变化率: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- 电流强度: $I(t)=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

  单位时间内通过某截面处的电量

- 细棒线密度: $\rho(x)=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$

  单位长度细棒的质量



2. 求导数举例

例2 求 $f(x)=x^{\mu}(\mu\neq 0)$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}$$

$$=x^{\mu}\lim_{h\to 0}\frac{(1+\frac{h}{x})^{\mu}-1}{h}$$

$$=\mu x^{\mu-1}.$$

当$x\to 0$时,

$(1+x)^{\mu}-1\sim \mu x(\mu\neq 0)$.

2. 求导数举例

例3　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$$

2. 求导数举例

例4 求函数 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$\boxed{a=e^{\ln a}}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h}$$

当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x.$

$$=a^x\ln a.$$

2. 求导数举例

例5 求函数 $f(x)=\log_a x$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h}$$

$$\boxed{\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

$\boxed{\text{当}x\to 0\text{时}, \ \ln(1+x)\sim x.}$

几个导数公式

$(C)'=0,$ $\quad (x^{\mu})'=\mu\cdot x^{\mu-1}.$

$(\sin x)'=\cos x,$ $\quad (\cos x)'=-\sin x.$

$(a^{x})'=a^{x}\ln a,$ $\quad (e^{x})'=e^{x}.$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例6 $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$，求 y'.

解 $y=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{7}{8}},$

$$y'=(x^{\frac{7}{8}})'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}.$$

3. 单侧导数

$f(x)$在 x_0 处的左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f(x)$在 x_0 处的右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

•导数与单侧导数的关系

$$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A\,.$$

•函数在区间上的可导性

函数 $f(x)$在开区间(a, b)内可导是指函数在区间内每一点可导.

函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上可导是指函数 $f(x)$ 在开区间(a, b)内可导, 且在 a 点有右导数、在 b 点有左导数.

3. 单侧导数

$f(x)$在 x_0 处的左导数: $f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$f(x)$在 x_0 处的右导数: $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

- 导数与单侧导数的关系

$$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A\,.$$

例7 求函数$f(x)=|x|$在$x=0$处的导数.

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=-1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=1$,

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 所以函数$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导.

左右导数:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

例8 设 $f(x) = \begin{cases} x \arccos x, & -1 \le x \le 0 \\ x \arctan \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$，求 $f'(0)$.

解

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\Theta \quad f'_-(0) = f'_+(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \therefore \quad f'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

三、导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即

$$f'(x_0)=\tan\alpha,$$

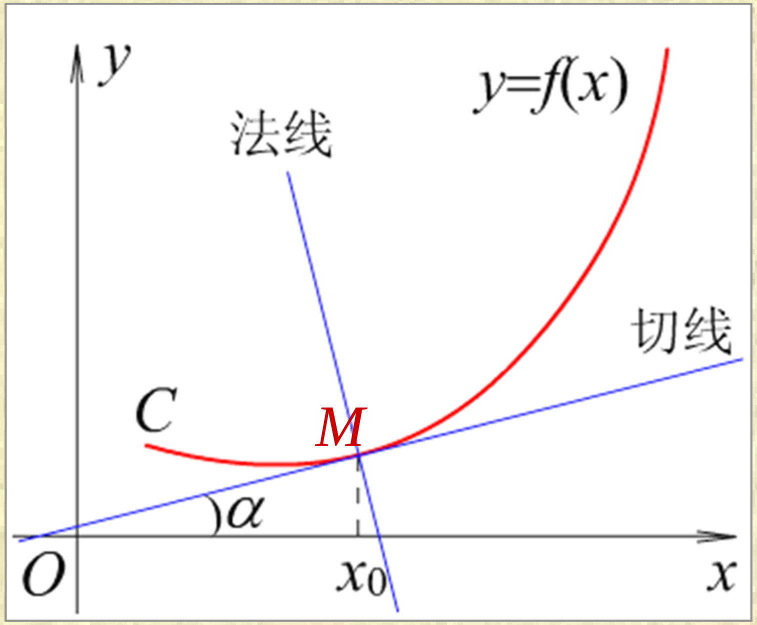
其中 α 是切线的倾角.

切线方程为:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

法线方程为:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$



直线的点斜式方程: $y-y_0=k(x-x_0)$

例9　求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，所求切线及法线的斜率分别为

$$k_1=(-\frac{1}{x^2})\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4,\quad k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4}.$$

所求切线方程为

$$y-2=-4(x-\frac{1}{2}),\ \text{即}\ 4x+y-4=0.$$

所求法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}),\ \text{即}\ 2x-8y+15=0.$$

直线的点斜式方程：$y-y_0=k(x-x_0)$

四、函数的可导性与连续性的关系

❖结论

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 x_0 处必连续.

这是因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0\ .$$

应注意的问题:

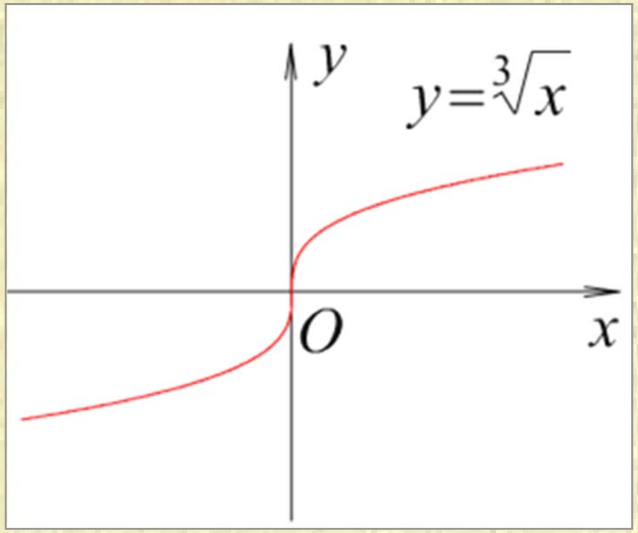
这个结论的逆命题不成立, 即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 但在点 x_0 处不一定可导.

•连续但不可导的函数

例10　函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内连续，

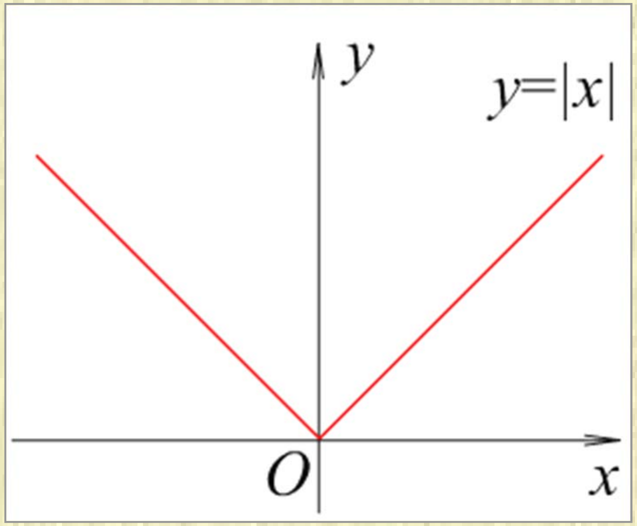
但在点 $x=0$ 处不可导:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=+\infty\,.$$



注意: 不可导, 仍可能有切线, 此时只能有铅直切线, 相应导数为无穷大.

例11　函数 $y=|x|$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在点 $x=0$ 处不可导.



问题: 试举一个在点 $x=x_0$ 处连续但不可导的例子.

函数 $y=|x-x_0|$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在点 $x=x_0$ 处不可导.

例12 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 0 \\ bx+e^x, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，a, b 应取何值？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=a, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1,$

由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续(因可导)，得 $a=1.$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2+a)-a}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(bx+e^x)-a}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx+e^x-1}{x}=b+\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=b+1,$$

由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，得 $b+1=0, \quad b=-1.$

思考题

设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=a$，则有(　　).

(A) $f'(x_0)=a$;　　(B) $f'(x_0)=2a$;

(C) $f'(x_0)=\dfrac{a}{2}$;　　(D) $f'(x_0)$可能不存在.

解题提示：

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

当 $f'(x_0)$存在时, (C)对. 但 $f'(x_0)$可能不存在.

举例说明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\text{存在，}$$

但 $f'(x_0)$可能不存在.

例子： 设 $f(x)=|x-x_0|,$

则有 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=0.$$

而由 $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{|h|}{h},$$

可知 $f'(x_0)$不存在.

作 业

习题2–1 (P90):

5.　　7.　　9.　　10.