§3.1 微分中值定理

一、几何背景

二、罗尔定理

三、拉格朗日中值定理

四、柯西中值定理

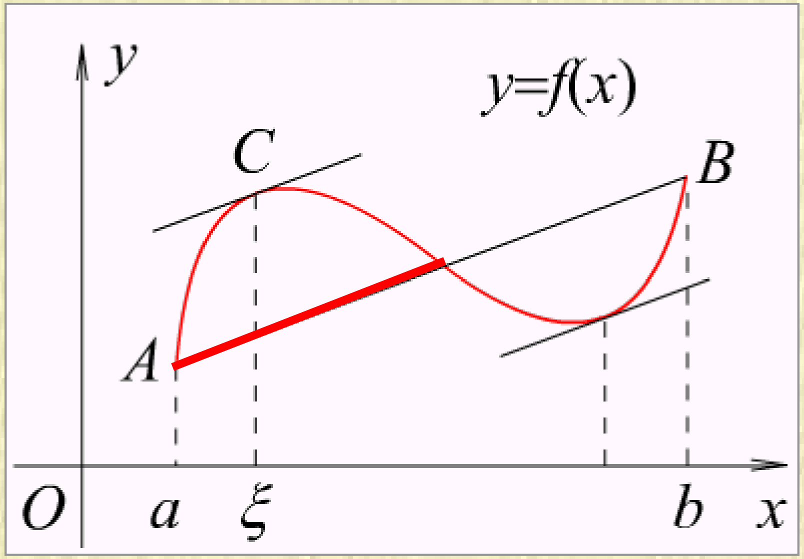
一、几何背景

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$$

拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 AB.



$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad k_{CT}=f'(\xi),$$

$$k_{CT}=k_{AB},\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

一、几何背景

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

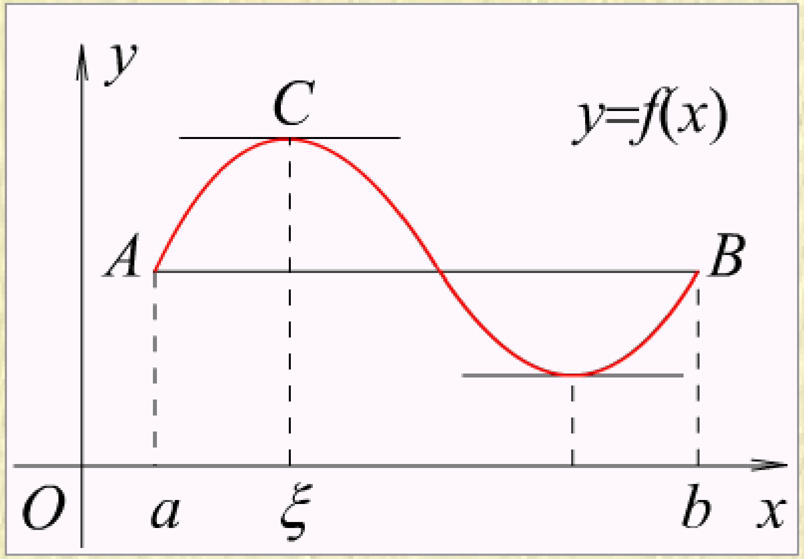
拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 AB.

当 $f(a)=f(b)$ 时,

$$f'(\xi)=0$$

罗尔定理



二、罗尔定理

❖**费马(Fermat)引理**

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值，若 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0) = 0$.

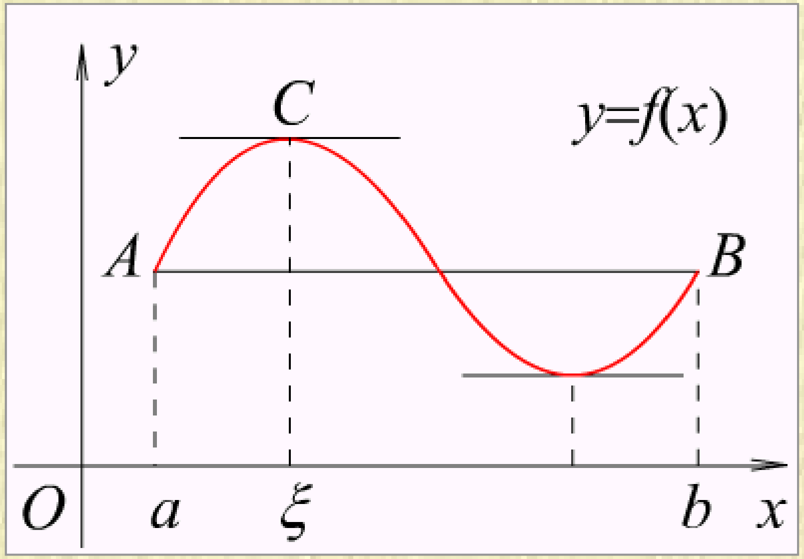
证明 设 $f(x_0)$为最大值.

当$x \in (a,b)$时，$f(x) - f(x_0) \le 0.$

当$x > x_0$时，$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$



二、罗尔定理

❖费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值，若 $f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0) = 0$.

证明 设 $f(x_0)$为最大值.

当$x \in (a,b)$时，$f(x) - f(x_0) \le 0$.

当$x > x_0$时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0,$$

当$x < x_0$时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$,

$$f'(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0,$$

所以，$f'(x_0) = 0$.

$f(x_0)$为最小值时类似可证.

❖罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

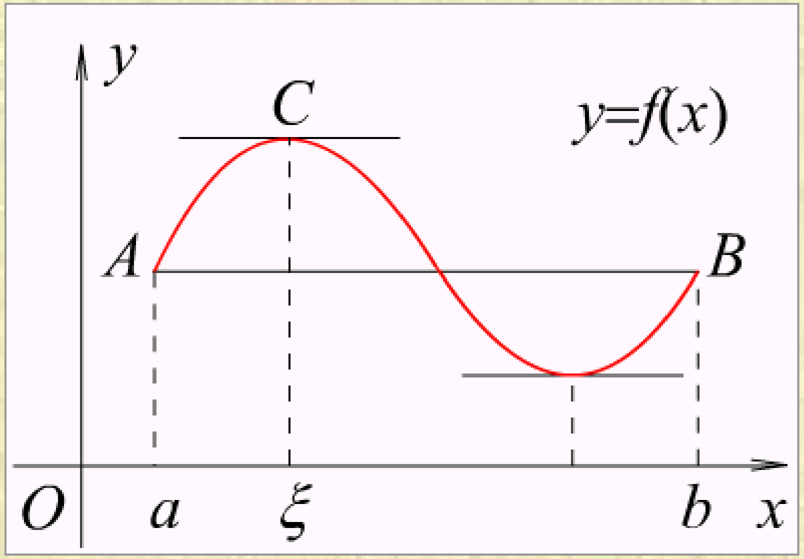
证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,

必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a,b)$.

(2) 若 $M \neq m$. 则 $M \neq f(a)$,



❖罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(\xi) = 0, \forall \xi \in (a,b)$.

(2) 若 $M \neq m$. 则 $M \neq f(a)$, 或 $m \neq f(a)$. 设 $M \neq f(a)$, 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi) = M$. 由费马引理, $f'(\xi) = 0$.

当 $m \neq f(a)$ 时, 类似可证 .

❖罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

应注意的问题:

如果定理的三个条件有一个不满足, 则定理的结论有可能不成立.

❖罗尔(Rolle)定理

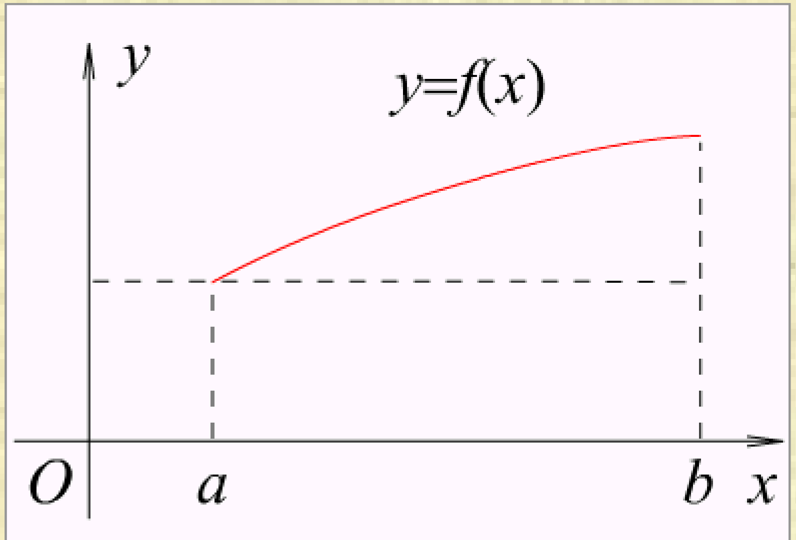
如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.



$f(a)=f(b)$不满足

例1 不求导数, 判断函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的导数有几个实根, 以及其所在范围.

解 $f(1)=f(2)=f(3)=0$, $f(x)$在$[1, 2]$, $[2, 3]$上满足罗尔定理的三个条件. 由罗尔定理

在$(1, 2)$内至少存在一点ξ_1, 使 $f'(\xi_1)=0$, ξ_1是 $f'(x)$的一个实根;

在$(2, 3)$内至少存在一点ξ_2, 使$f'(\xi_2)=0$, ξ_2也是$f'(x)$的一个实根.

$f'(x)$是二次多项式, 至多有两个实根.

所以 $f'(x)$有两个实根, 分别在区间$(1, 2)$及$(2, 3)$内.

例2 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证明 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$在$[0,1]$上连续,

且 $f(0)=1, f(1)=-3$.

由零点定理, $\exists x_0 \in (0,1)$, 使 $f(x_0)=0$,

x_0 即为方程的一个根.

设另有 $x_1 \in (0,1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$.

Θ $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

由罗尔定理, 至少存在一个 ξ (在 x_0, x_1 之间),

使得 $f'(\xi)=0$. 但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$,

矛盾. $\therefore$ 原方程在$(0,1)$内有且仅有一个根 .

例3 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)].$$

分析: **结论可化为**

$$f'(x) - 2x[f(1) - f(0)] = 0 \text{ 在}(0,1)\text{内有根 } \xi.$$

寻找 $F(x)$, 使 $F'(x) = f'(x) - 2x[f(1) - f(0)]$,

结论进一步化为

$$F'(x) = 0 \text{ 在}(0,1)\text{内有根 } \xi.$$

观察与思考: $F(x) = ?$ $F(x) = f(x) - x^2[f(1) - f(0)]$

例3 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

分析: 结论可化为

$$f'(x)-2x[f(1)-f(0)]=0 \text{ 在}(0,1)\text{内有根 } \xi.$$

证明 设 $F(x)=f(x)-x^2[f(1)-f(0)]$,

则 $F(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且

$$F(0)=f(0)=F(1)$$

由罗尔定理, 在$(0,1)$内至少存在一点ξ, 使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-2\xi[f(1)-f(0)]=0$$

也即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

用罗尔定理证明的基本题型:

证明方程 $F'(x)=0$ 在(a,b)内存在根.

思考题

设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 且 $f(1)=0$.

证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

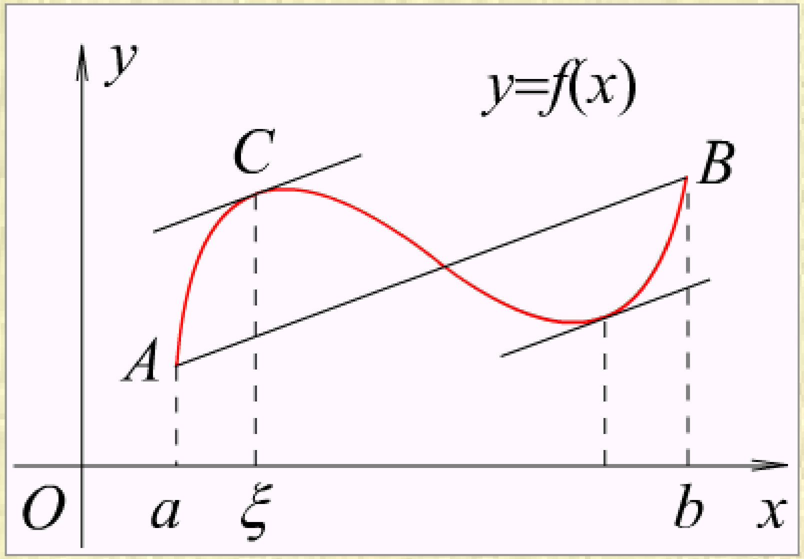
提示: 考虑方程 $2xf(x)+x^2f'(x)=0.$

化为方程 $[x^2f(x)]'=0.$

三、拉格朗日中值定理

在曲线弧 AB 上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



❖拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

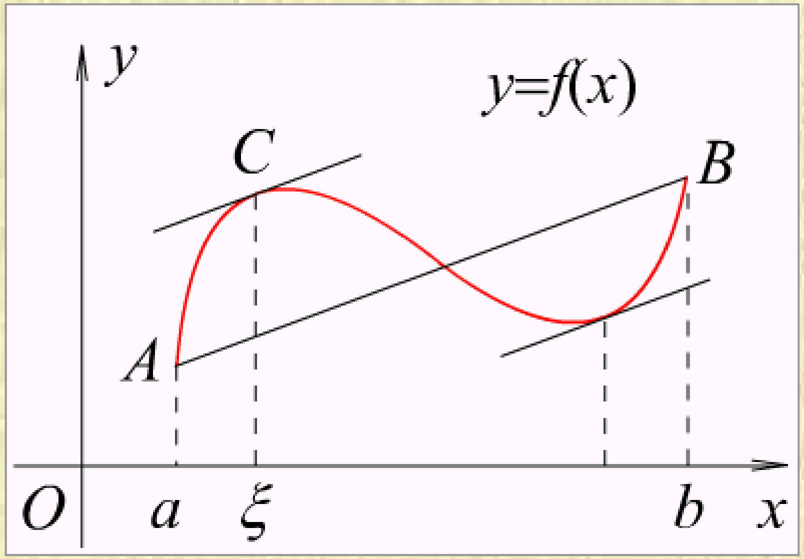
那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

在曲线弧 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 AB.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



❖拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

分析: 结论可化为

$f(b)-f(a)-f'(x)(b-a)=0$在(a, b)内有根ξ.

寻找 $F(x)$, 使 $F'(x)=f(b)-f(a)-f'(x)(b-a)$

结论进一步化为

$F'(x)=0$在(a, b)内有根ξ.

$F(x)=?$ $F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)$

❖拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

证明 令 $F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a)$

则 $F(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 且

$$F(a)=F(b)=af(b)-bf(a)$$

由罗尔定理, 在(a, b)内至少存在一点ξ, 使

$$F'(\xi)=f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0$$

由此得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

❖拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导,

那么在(a, b)内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

•有限增量公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \ (0<\theta<1),$$

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \ (0<\theta<1).$$

注：$dy=f'(x)\Delta x$ 是函数增量 Δy 的近似表达式.

$f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ 是函数增量 Δy 的精确表达式.

例4 证明当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 显然 $f(t)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，根据定理, 在 $(0, x)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad 0<\xi<x\ .$$

由于 $f(0)=0,\ f'(t)=\frac{1}{1+t}$, 因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}\ .$$

又由 $0<\xi<x$, 有 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$

即 $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ .$$

❖定理

如果函数 $f(x)$在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

证明 在区间 I 上任取两点 $x_1, x_2(x_1<x_2)$，应用拉格朗日中值定理，在(x_1, x_2)内至少存在一点 ξ，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi< x_2).$$

由假定，$f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即

$$f(x_2)=f(x_1).$$

因此 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

例5 证明: $2\arcsin\sqrt{x}-\arcsin(2x-1)=\dfrac{\pi}{2},\ 0\le x\le 1.$

证明 设 $f(x)=2\arcsin\sqrt{x}-\arcsin(2x-1),\ \ x\in[0,1].$

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}}=0,\ \ (0<x<1)$$

$\therefore\ \ f(x)\equiv C,\ \ 0<x<1.$ 又因 $f(x)$在$[0,1]$上连续,

$\therefore\ \ f(x)\equiv C,\ \ 0\le x\le 1.$ 而 $C=f(0)=\dfrac{\pi}{2},$

因此 $2\arcsin\sqrt{x}-\arcsin(2x-1)=\dfrac{\pi}{2},0\le x\le 1.$

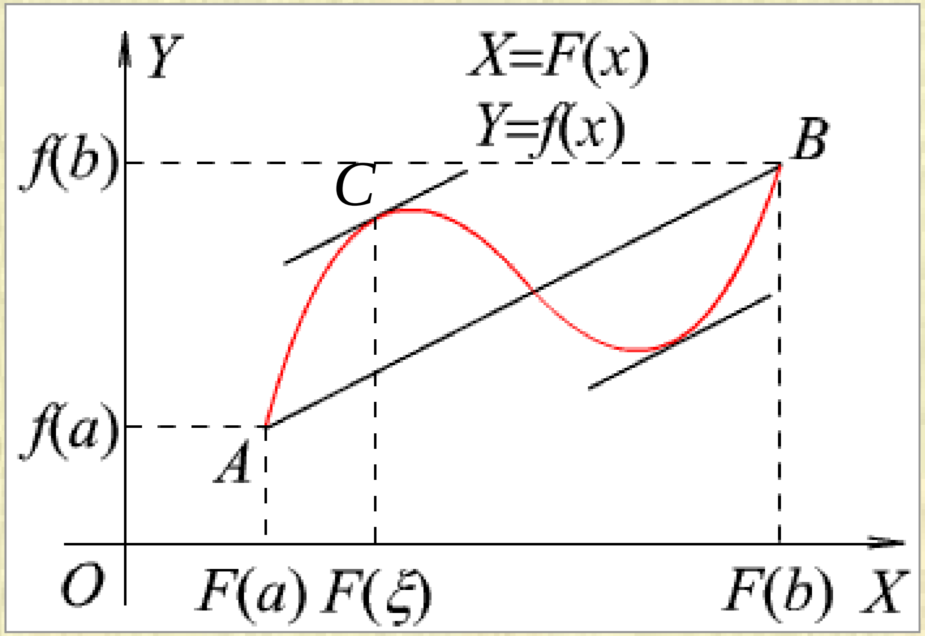
四、柯西中值定理

弦 AB 的斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$,

而在点 $x=\xi$ 处, $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

在曲线弧 AB 上至少有一点 C, 在该点处的切线平行于弦 AB.

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$



❖柯西(Cauchy)中值定理

如果函数 $f(x)$及 $F(x)$满足

(1) 在闭区间$[a, b]$上连续;

(2) 在开区间(a, b)内可导;

(3) $F'(x)$在(a, b)内恒不为零,

那么在(a, b)内至少有一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

柯西中值公式

如果取 $F(x)=x$, 则柯西中值公式就变成了拉格朗日中值公式.

例6 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,
证明:至少存在一点 $\xi \in (0,1)$,使

$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)].$$

分析: 结论可变形为 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi} = \dfrac{f'(x)}{(x^2)'}\Big|_{x=\xi}.$

证明 设 $F(x) = x^2$,

则 $f(x), F(x)$在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad 即 \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

也即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

作 业

习题3–1 (P132):

5.

6.

8.

10.

12.