§3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

二、曲线的凹凸性与拐点

一、函数单调性的判定法

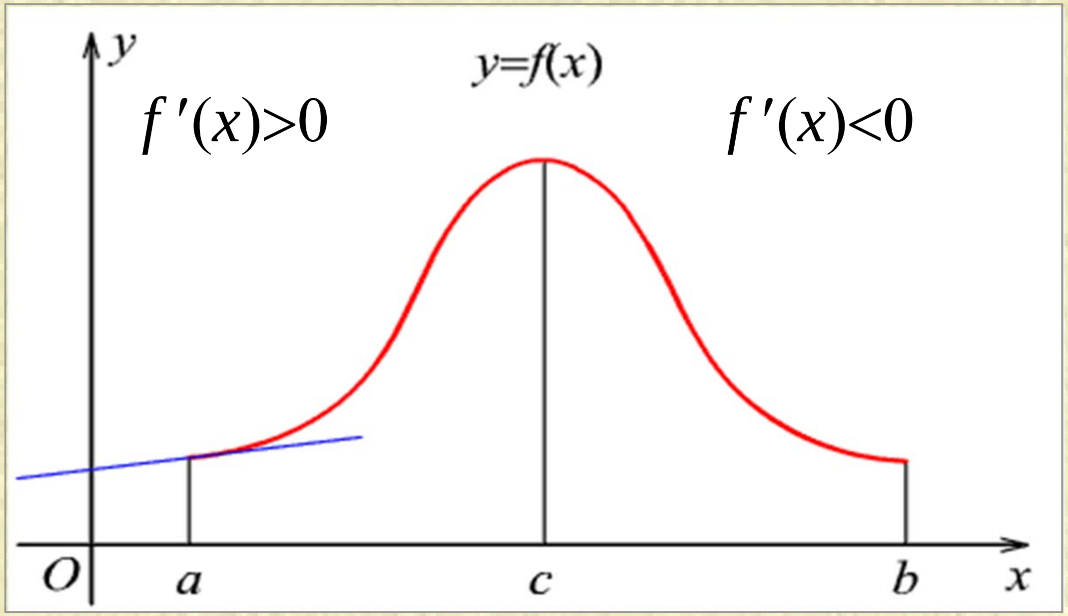
• 观察与思考

函数的单调性与导数的符号有什么关系?

• 观察结果

函数单调增加时导数大于零,

函数单调减少时导数小于零.

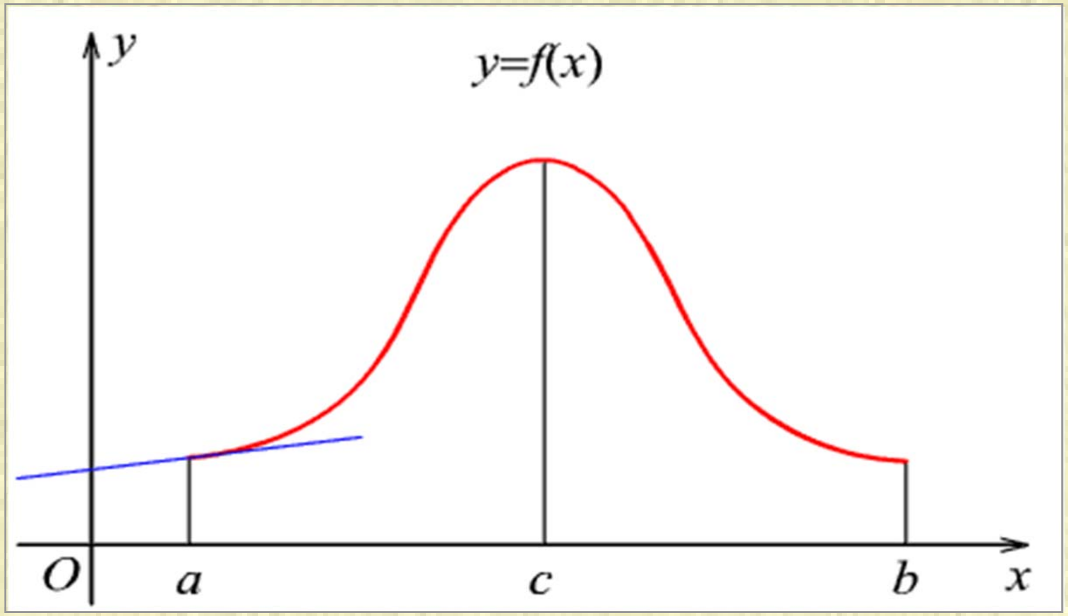


❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.



❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

证明 只证(1). 在$[a, b]$上任取两点$x_1, x_2(x_1<x_2)$,

由拉格朗日中值公式，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ (x_1<\xi<x_2).$$

因为$f'(\xi)>0$，$x_2-x_1>0$，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,$$

即 $$f(x_1)<f(x_2),$$

这就证明了函数$f(x)$在$[a, b]$上单调增加.

❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

例1 讨论函数 $y=e^x-x-1$的单调性.

解 函数$y=e^x-x-1$的定义域为$(-\infty, \infty)$.

$$y'=e^x-1.$$

因为在$(-\infty, 0)$内$y'<0$，所以函数 $y=e^x-x-1$在$(-\infty, 0]$上单调减少;

因为在$(0, +\infty)$内$y'>0$，所以函数 $y=e^x-x-1$在$[0, +\infty)$上单调增加.

❖定理1(函数单调性的判定法)

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1)如果在(a, b)内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调增加;

(2)如果在(a, b)内$f'(x)<0$，则$f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

例2 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

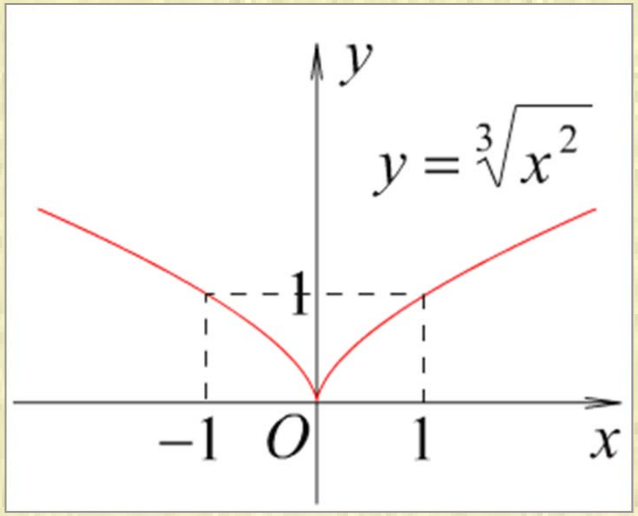
$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ (x\neq 0)$$

因为$x<0$时，$y'<0$，

所以函数在$(-\infty, 0]$ 上单调减少;

因为$x>0$时，$y'>0$，

所以函数在$[0, +\infty)$上单调增加.



例3 确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

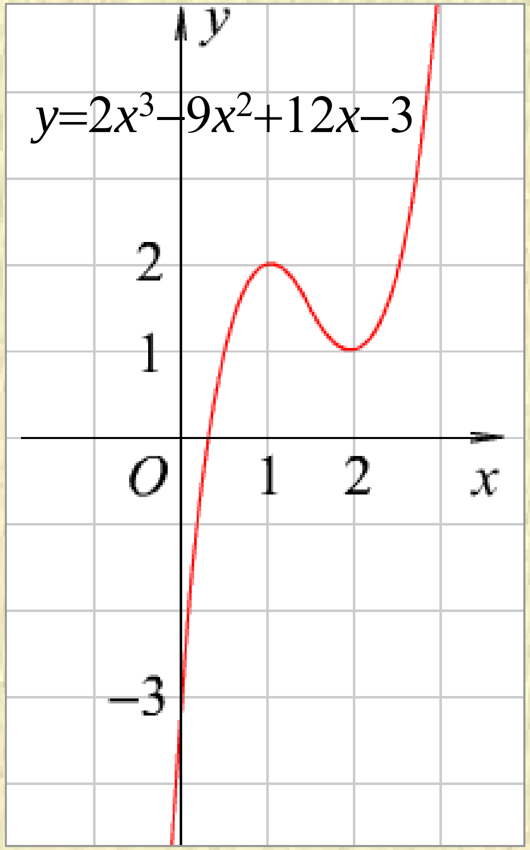
解 这个函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2),$$

导数为零的点为$x_1=1$、$x_2=2$.

列表分析:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗



函数$f(x)$在区间$(-\infty, 1]$和$[2, +\infty)$上单调增加，在区间$[1, 2]$上单调减少.

例4 确定函数 $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-x$ 的单调区间.

解 这个函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1,$$

驻点 $x=1$, 不可导点 $x=0$,

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
y	↘	↗	↘

函数$f(x)$在区间$(-\infty, 0]$和$[1, +\infty)$上单调减少,

在区间$[0, 1]$上单调增加.

例5 讨论函数$y=x^3$的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

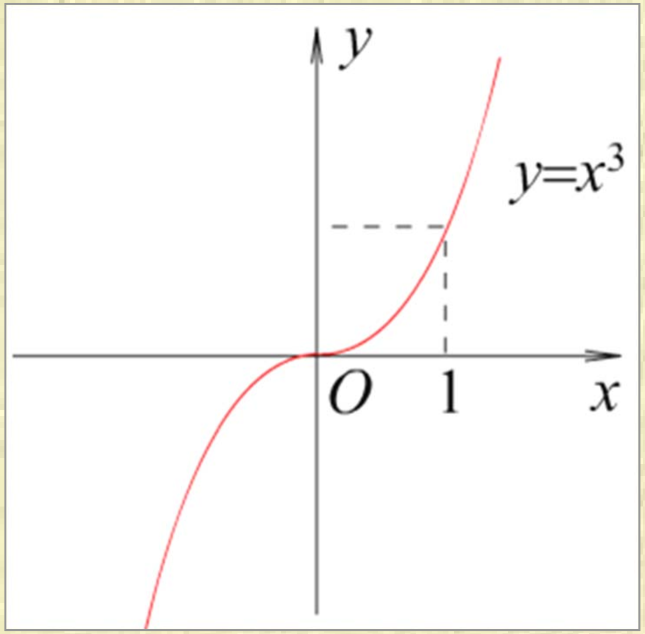
$$y'=3x^2.$$

显然当$x=0$时，$y'=0$；当$x\neq0$时，$y'>0$.

因此函数$y=x^3$在区间$(-\infty, 0]$及$[0, +\infty)$上都是单调增加的. 从而函数在整个定义域$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的.

说明：

一般地，如果$f'(x)$在某区间内的有限个点处为零，在其余各点处均为正(或负)时，那么$f(x)$在该区间上仍旧是单调增加(或减少)的.



例6 证明: 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

证明 令 $f(x) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$, $f(x)$在$[0, \dfrac{\pi}{2})$连续,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$$

当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x > x$, 因此 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$在$[0, \dfrac{\pi}{2})$单调增加. 于是

当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，$f(x) > f(0) = 0$,

即 $$\tan x > x + \frac{x^3}{3}.$$

例7 证明: 当 $b > a$ 时e $a^b > b^a$.

分析 $a^b > b^a \Longleftrightarrow b\ln a > a\ln b$

问题化为: 当 $x > a > e$ 时, $x\ln a > a\ln x$.

证明 令 $f(x) = x\ln a - a\ln x$, $f(x)$在$[a, +\infty)$上连续,

当 $x > a > e$ 时, $f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > \ln e - \dfrac{a}{a} = 0$,

所以 $f(x)$在$[a, +\infty)$上单调增加. 于是

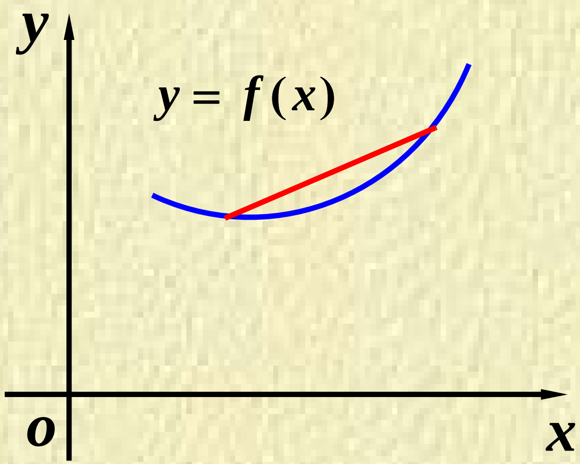
当 $b > a > e$ 时, $f(b) > f(a) = 0$,

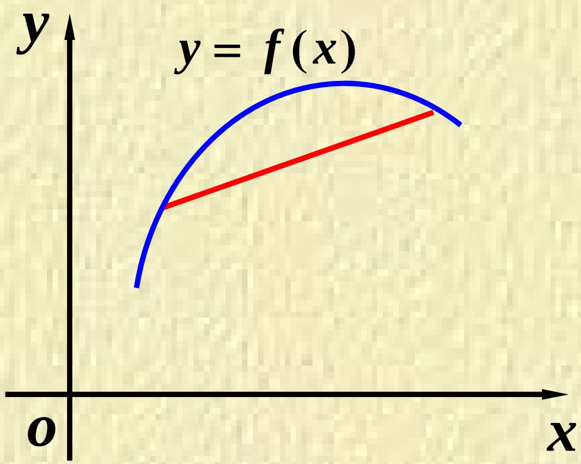
即 $b\ln a > a\ln b$,

也即 $a^b > b^a$.

二、曲线的凹凸性与拐点

问题:如何研究曲线的弯曲方向?





图形上任意弧段位于所张弦的下方

图形上任意弧段位于所张弦的上方

❖曲线的凹凸性定义

设$f(x)$在区间I上连续,

对I上任意两点x_1, x_2,

如果恒有

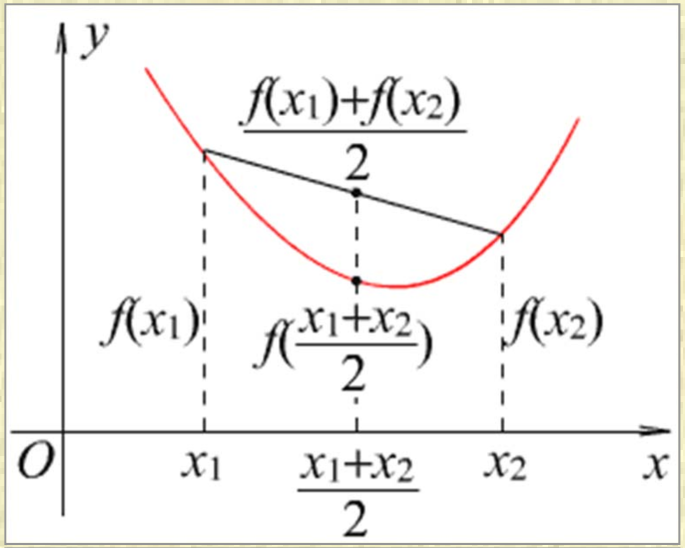
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

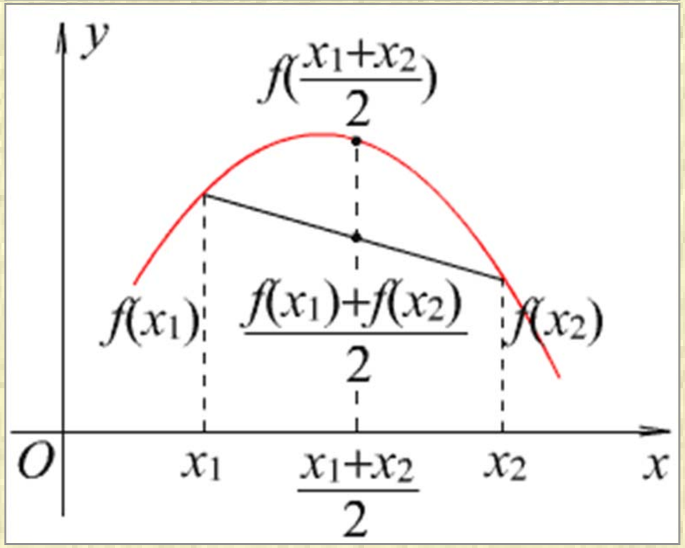
那么称$f(x)$在I上的图形是凹的;

如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凸的.





❖定理2(曲线凹凸性的判定法)

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数.

若在(a, b)内$f''(x)>0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的;

若在(a, b)内$f''(x)<0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

观察与思考:

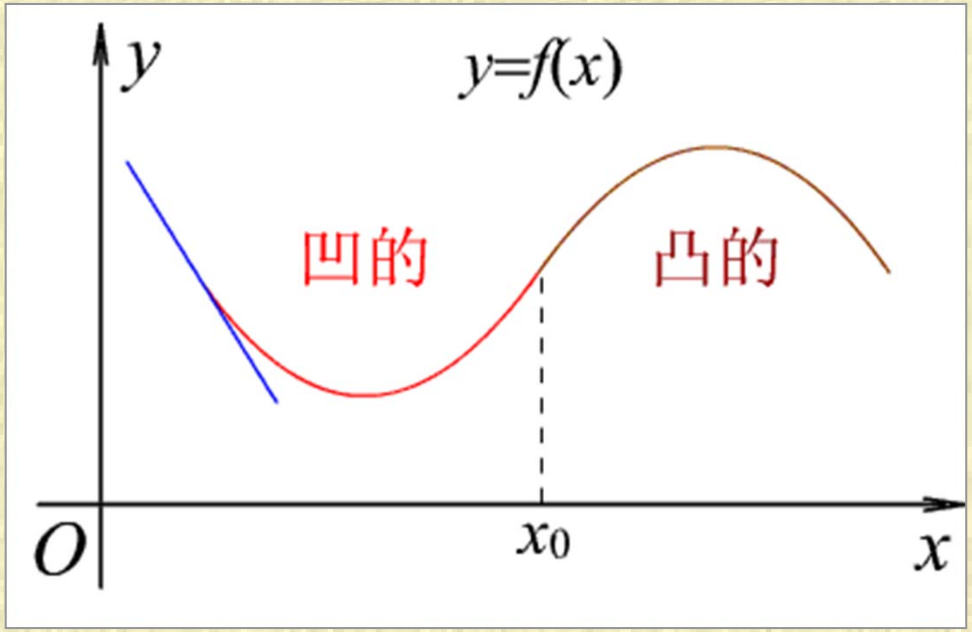
$f(x)$的图形的凹凸性与$f'(x)$的单调性的关系.

1) $f(x)$的图形是凹的

$\Longleftrightarrow f'(x)$单调增加;

2) $f(x)$的图形是凸的

$\Longleftrightarrow f'(x)$单调减少.



❖定理2(曲线凹凸性的判定法)

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数.

若在(a, b)内$f''(x)>0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的;

若在(a, b)内$f''(x)<0$, 则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

例8 判断曲线$y=x^3$的凹凸性.

解 $y'=3x^2$, $y''=6x$.

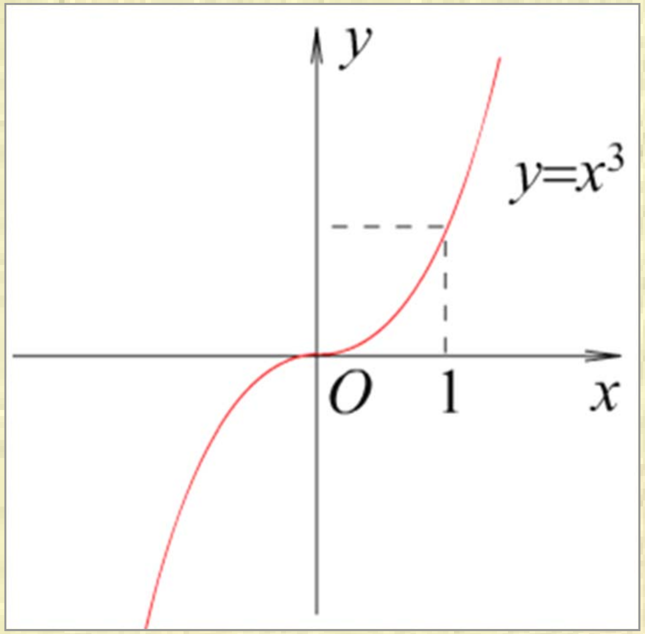
由$y''=0$, 得$x=0$.

因为当$x<0$时，$y''<0$,

所以曲线在$(-\infty, 0]$上是凸的;

因为当$x>0$时，$y''>0$,

所以曲线在$[0, +\infty)$上是凹的.



❖拐点

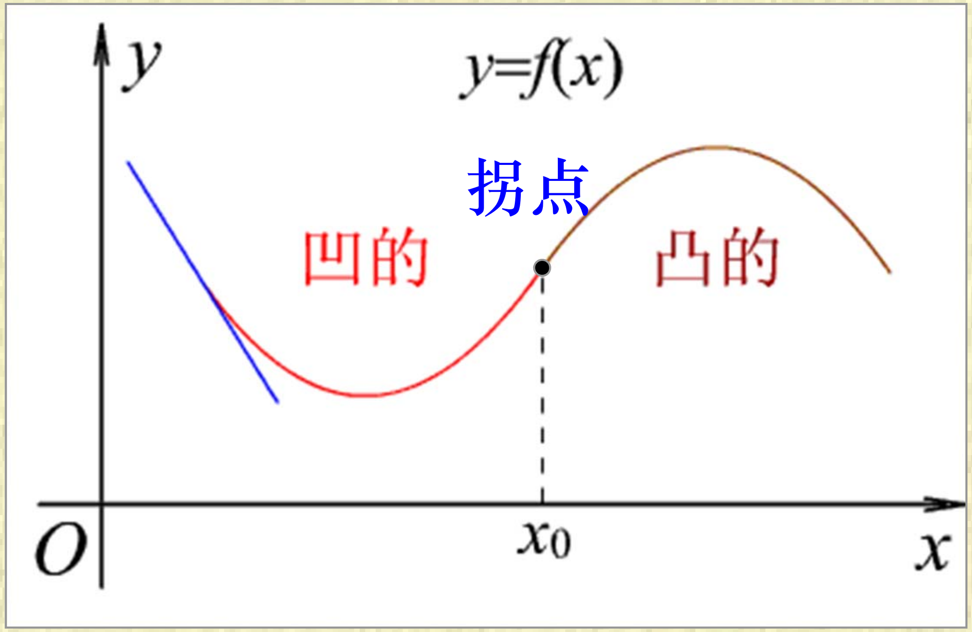
连续曲线$y=f(x)$上凹弧与凸弧的连接点称为该曲线的拐点.

•讨论

如何确定曲线$y=f(x)$的拐点?

如果$(x_0, f(x_0))$是拐点, 且$f''(x_0)$存在, 问$f''(x_0)=$?

如何找可能的拐点?



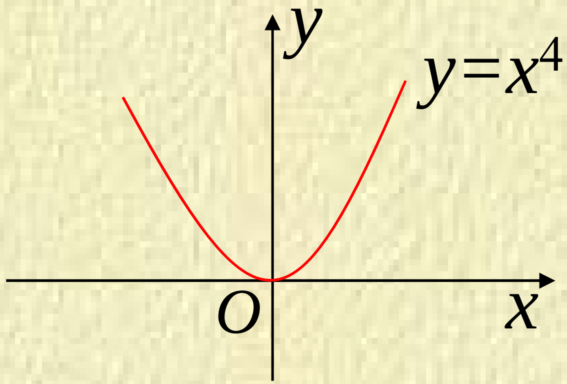
•只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.

•如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

•讨论

曲线$y=x^4$是否有拐点?

虽然$y''(0)=0$, 但$(0,0)$不是拐点.



例9 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

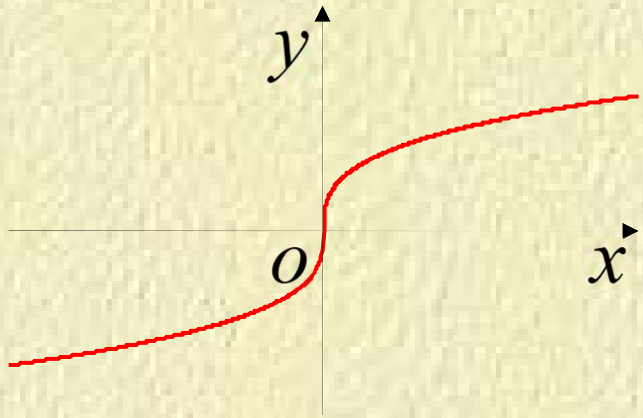
解 $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$;

二阶导数无零点;

当$x=0$时，二阶导数不存在.

因为当$x<0$时, $y''>0$; 当$x>0$时, $y''<0$,

所以点$(0, 0)$是曲线的拐点.



•只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.

•如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

例10　求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸的区间.

解　(1)函数$y=3x^4-4x^3+1$的定义域为$(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=12x^3-12x^2$，　$y''=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3})$；

(3)解方程$y''=0$，得$x_1=0$，　$x_2=\frac{2}{3}$；

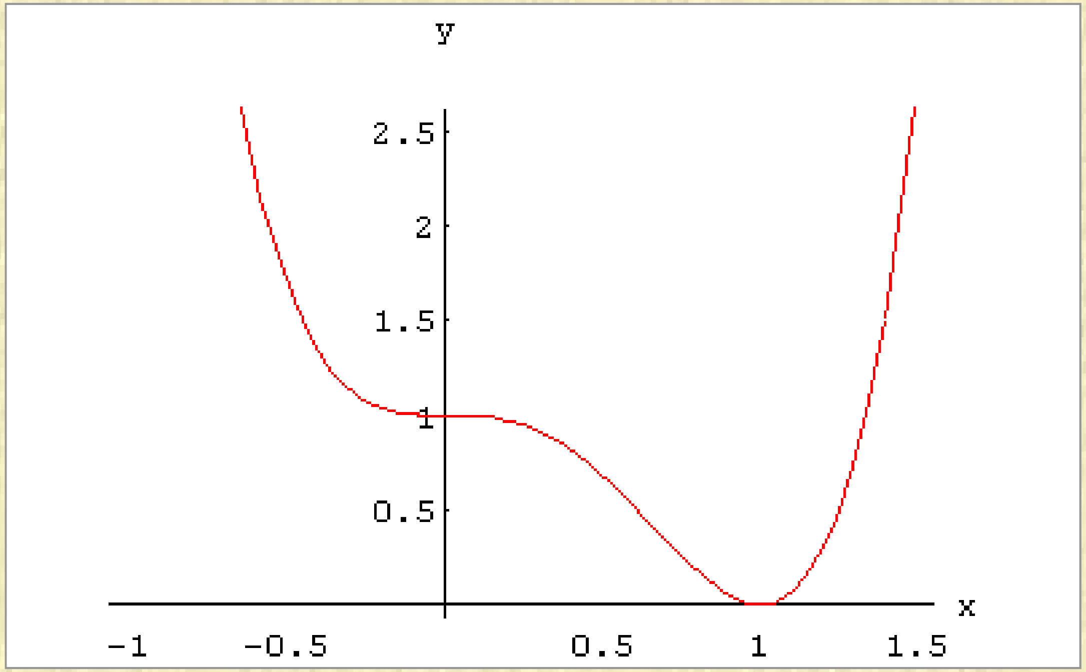
(4)列表判断:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	2/3	$(2/3, +\infty)$
$y''(x)$	+	0	−	0	+
$y(x)$	$\smile$	1	$\frown$	11/27	$\smile$

在区间$(-\infty,0]$和$[2/3,+\infty)$上曲线是凹的；在区间$[0,2/3]$上曲线是凸的. 点$(0, 1)$和$(2/3, 11/27)$是曲线的拐点.

•只有$f''(x_0)$等于零或不存在，$(x_0, f(x_0))$才可能是拐点.
•如果在x_0的左右两侧$f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$是拐点.

例10　求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸的区间.



在区间$(-\infty,0]$和$[2/3,+\infty)$上曲线是凹的；在区间$[0,2/3]$上曲线是凸的. 点$(0, 1)$和$(2/3, 11/27)$是曲线的拐点.

作 业

习题3–4 (P151):

3.单号

4.(2) (3) (5)

8.双号

11.

例 求曲线 $y = x^2 + 9\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间和拐点.

解 $y' = 2x + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$, $y'' = 2 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$,

二阶导数的零点为 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

二阶导数不存在的点为 $x=0$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y	$\smile$	10	$\frown$	0	$\frown$	10	$\smile$

凹区间为 $(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$, 凸区间为$[-1, 0]$和$[0, 1]$,

拐点为$(-1, 10)$和$(1, 10)$.

思考: 凸区间$[-1, 0]$和$[0, 1]$可否合并为$[-1, 1]$?

例 证明: 当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\sin x + \tan x > 2x.$

证明 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$连续，

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2,$$

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$0 < \cos x < 1$, $\cos x > \cos^2 x$,

$$f'(x) > \cos^2 x + \sec^2 x - 2 = (\cos x - \sec x)^2 \geq 0$$

所以 $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$单调增加. 于是

当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$f(x) > f(0) = 0$,

即 $\sin x + \tan x > 2x.$