§3.5 函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

二、最大值最小值问题

一、函数的极值及其求法

❖函数的极值

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果对于任意$x\in \mathring{U}(x_0)$有

$$f(x)<f(x_0)\ (\text{或}\ f(x)>f(x_0)\ ),$$

则称$f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个**极大值**(或**极小值**).

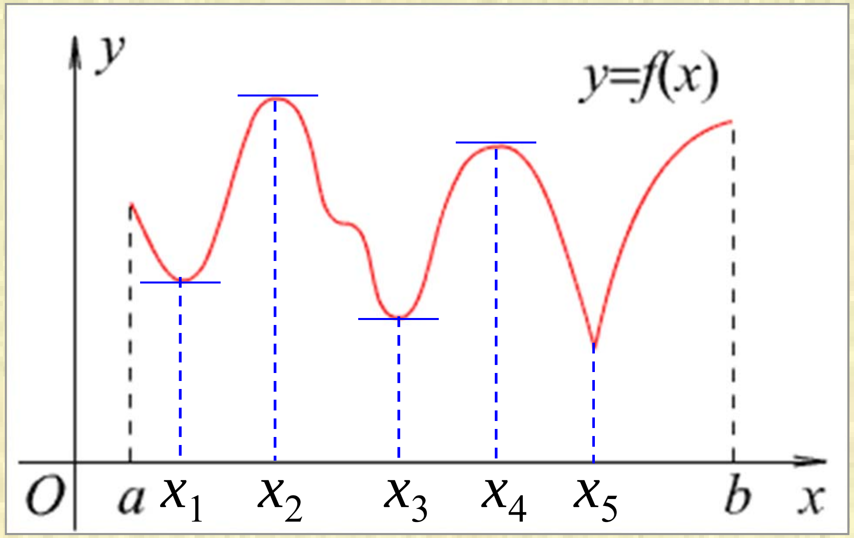
函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

提问:

$f(a)$和 $f(b)$是极值吗?

观察与思考:

观察极值与切线的关系.



❖费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值, 若 $f'(x_0)$存在, 则 $f'(x_0) = 0$.

❖定理1 (必要条件)

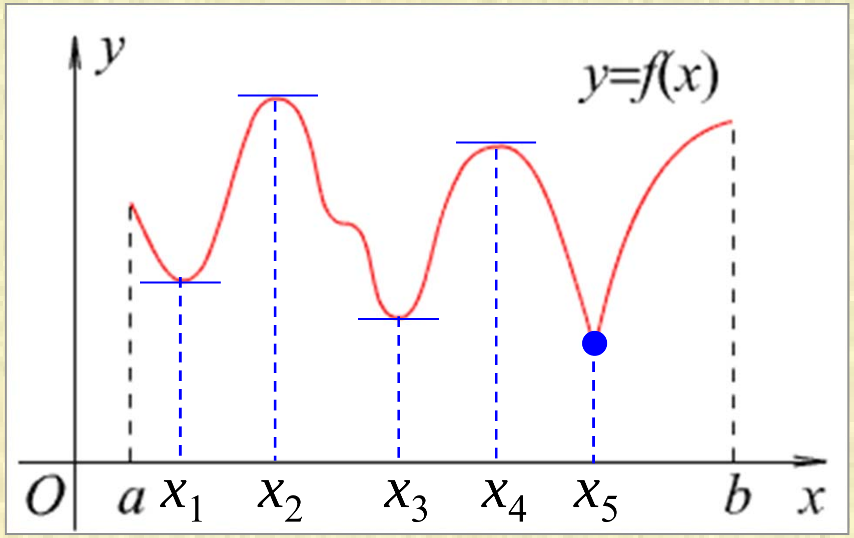
如果x_0为$f(x)$的极值点, 那么$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

•**驻点**: 导数的零点.

讨论:

驻点是否一定是极值点?

考察$x=0$是否是函数$y=x^3$的驻点, 是否是函数的极值点.



❖费马(Fermat)引理

设 $f(x_0)$为函数 $f(x)$在开区间(a, b)内的最大(小)值, 若 $f'(x_0)$存在, 则 $f'(x_0)=0$.

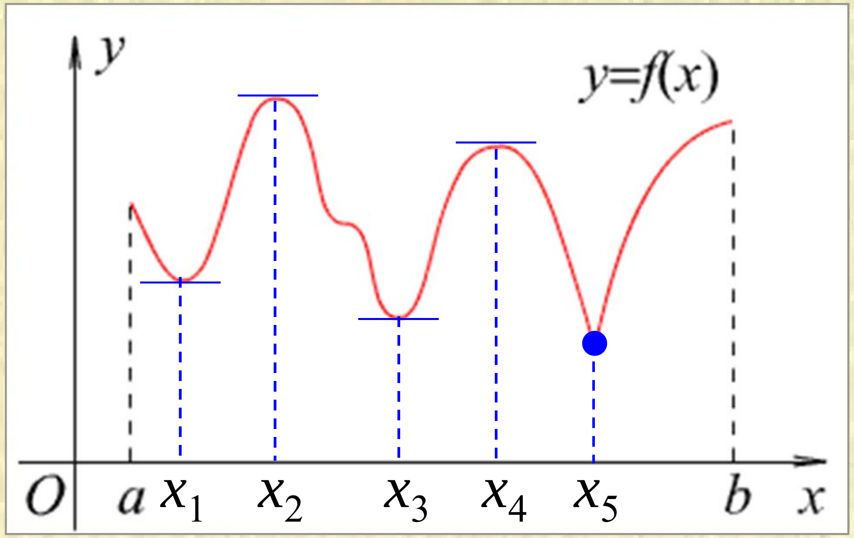
❖定理1 (必要条件)

如果x_0为$f(x)$的极值点, 那么$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在.

•驻点: 导数的零点.

观察与思考:

观察曲线的升降与极值之间的关系.



❖定理2（第一充分条件）

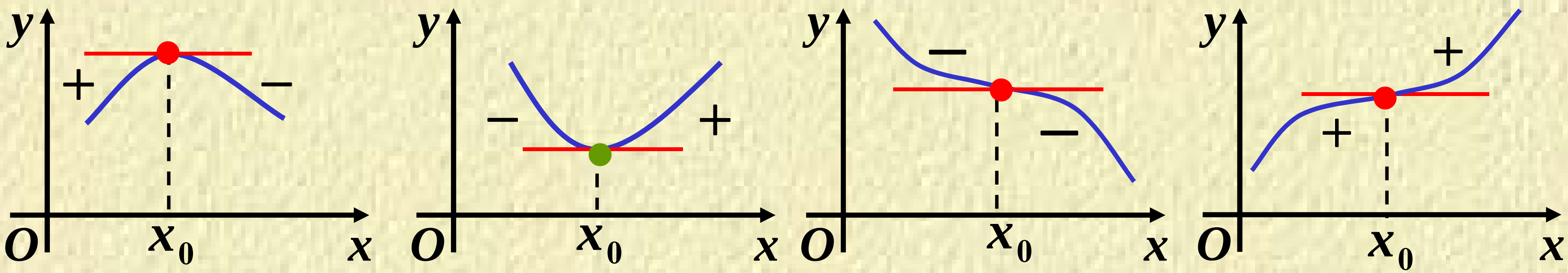
设函数$f(x)$在x_0处连续，且在$(a, x_0)\cup(x_0, b)$内可导.

(1)如果在(a, x_0)内$f'(x)>0$，在(x_0, b)内$f'(x)<0$，那么函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)如果在(a, x_0)内$f'(x)<0$，在(x_0, b)内$f'(x)>0$，那么函数$f(x)$在x_0处取得极小值;

(3)如果在(a, x_0)及(x_0, b)内 $f'(x)$的符号相同，那么函数$f(x)$在x_0处没有极值.

$f'(x)$的正负变化与极值的关系



例1 求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解 (1) $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续,

$$f'(x)=\frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}};$$

(2)令$f'(x)=0$, 得驻点$x=1$; $x=-1$为$f(x)$的不可导点;

(3)列表判断

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	不可导	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$

(4)极大值为 $f(-1)=0$, 极小值为 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$.

例2 讨论方程 $\ln x = ax\ (a>0)$有几个实根?

解 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0$,

$f(x)$ 在 $(0,e]$上单调增加,

值域为 $(-\infty, e^{-1}]$;

当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$,

$f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调减少,

值域为 $(0, e^{-1}]$.

当 $a>e^{-1}$ 时,

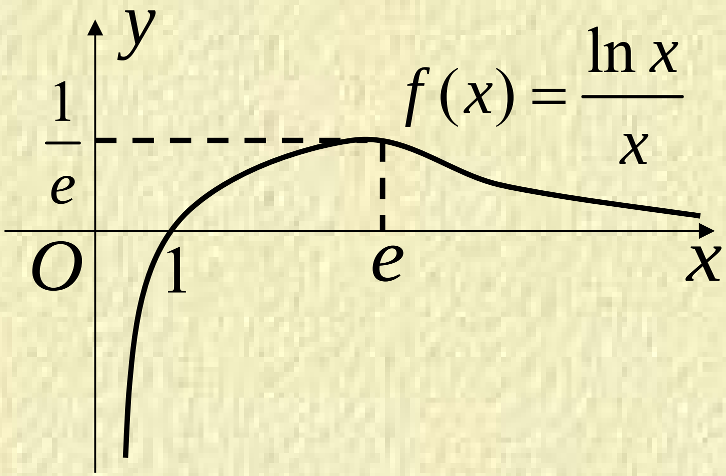
方程 $\ln x = ax$ 无实根;

当 $a=e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有一个实根;

当 $0<a<e^{-1}$ 时,

方程 $\ln x = ax$ 有两个实根.

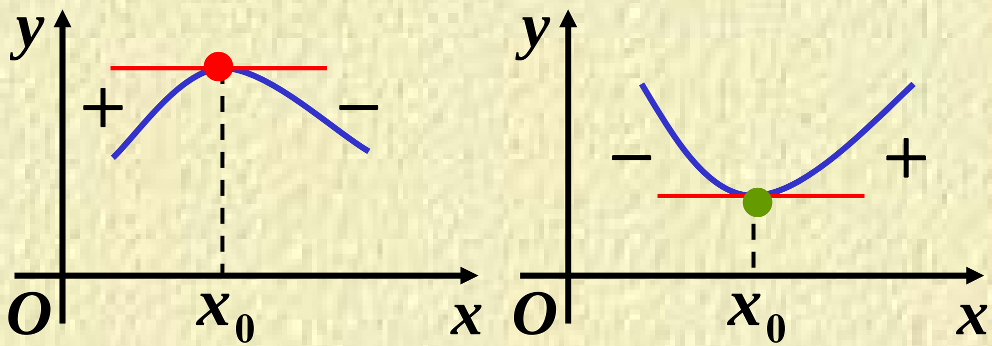


❖定理3 (第二充分条件)

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.



$f'(x)$的正负变化与极值的关系

❖定理3(第二充分条件)

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

证 (1) $$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0,$$

因此,当$|x-x_0|$充分小时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0.$ (由极限的保号性)

可见，$f'(x)$ 与 $x-x_0$ 异号.

当$x<x_0$，$f'(x)>0$; 当$x>x_0$，$f'(x)<0$.

所以，$f(x)$在点x_0处取极大值.

(2)类似可证.

❖定理3（第二充分条件）

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，那么

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

应注意的问题：

如果$f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$，则定理3不能应用，但不能由此说明$f(x_0)$不是$f(x)$的极值.

讨论：

函数$f(x)=x^4$，$g(x)=x^3$在点$x=0$是否有极值?

例3 求函数$f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$.

令$f'(x)=0$, 求得驻点$x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

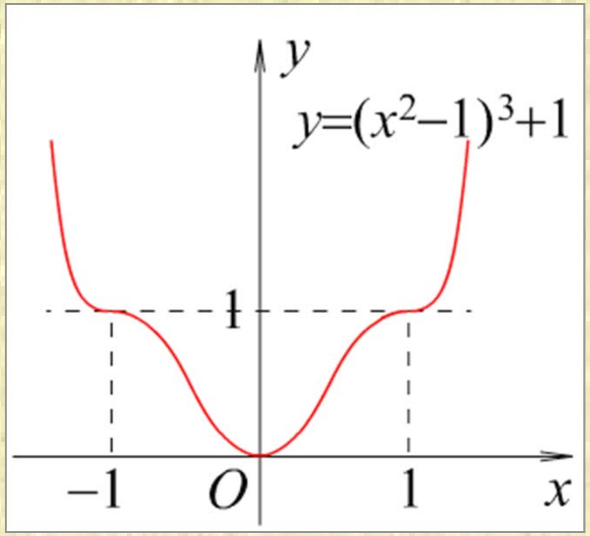
$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$.

因为$f''(0)=6>0$, 所以$f(x)$在$x=0$处取得极小值, 极小值为$f(0)=0$.

因为$f''(-1)=f''(1)=0$, 所以用定理3无法判别.

因为在$x=-1$的左右邻域内$f'(x)<0$, 所以$f(x)$在$x=-1$处没有极值.

同理, $f(x)$在$x=1$处也没有极值.



例4 求函数$f(x)=e^x\sin x$的极值.

解 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

令$f'(x)=0$, 得驻点 $x_k = k\pi - \dfrac{\pi}{4}\ (k \in \mathbf{Z})$.

$f''(x)=2e^x\cos x$.

因为 $f''(x_{2k}) = \sqrt{2}\, e^{x_{2k}} > 0$,

所以 $f(x_{2k}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{x_{2k}}$ 为极小值.

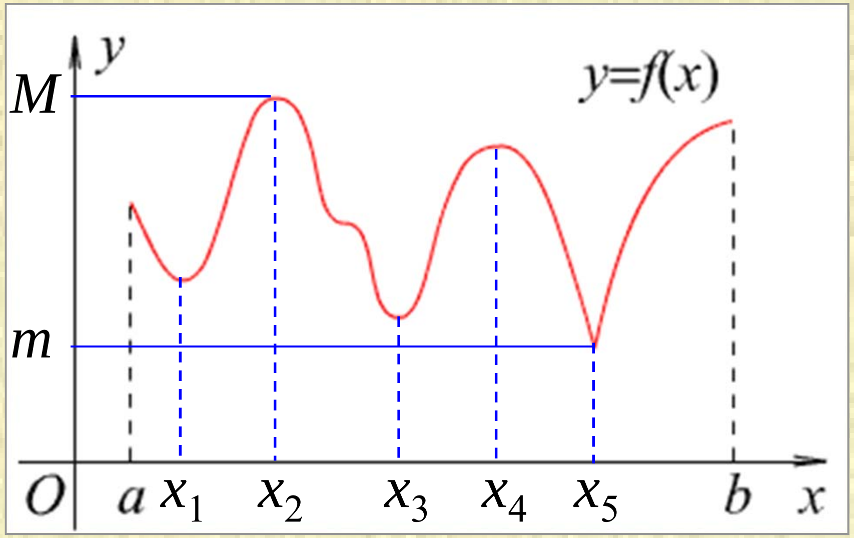
因为 $f''(x_{2k+1}) = -\sqrt{2}\, e^{x_{2k+1}} < 0$,

所以 $f(x_{2k+1}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{x_{2k+1}}$ 为极大值.

二、最大值最小值问题

观察与思考：

观察哪些点有可能成为函数的最大值或最小值点，怎样求函数的最大值和最小值.

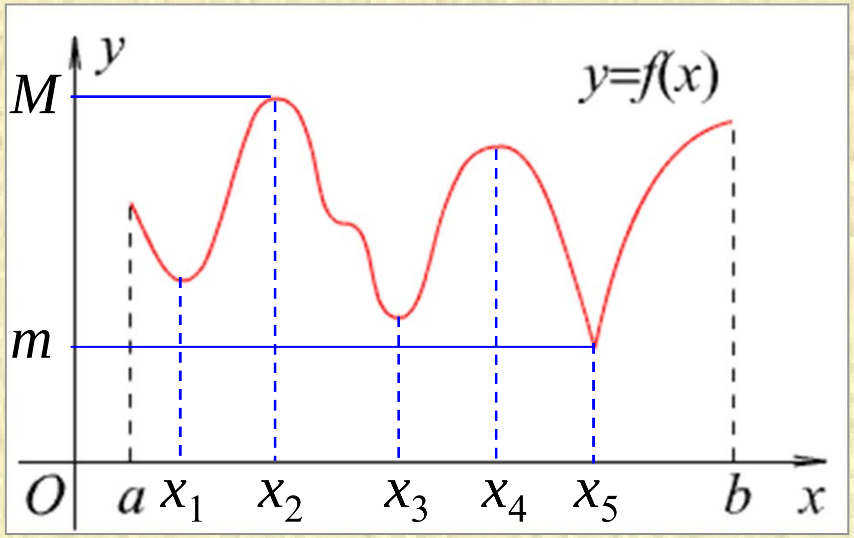


❖闭区间上连续函数的最值求法

(1)求出函数$f(x)$在(a, b)内的驻点和不可导点, 设这些点为$x_1, x_2, \cdots, x_n$;

(2)计算函数值 $f(a),\ f(x_1), \cdots,\ f(x_n),\ f(b)$;

(3)判断: 最大者是函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最大值, 最小者是函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的最小值.



例5 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$在$[-3, 4]$上的最大值与最小值.

解 $$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-3,1]\cup[2,4] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-3,1)\cup(2,4) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}.$$

在$(-3, 4)$内, $f(x)$的驻点为 $x=\dfrac{3}{2}$;

不可导点为 $x=1$ 和 $x=2$.

由于 $f(-3)=20$, $f(1)=0$, $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{4}$, $f(2)=0$, $f(4)=6$,

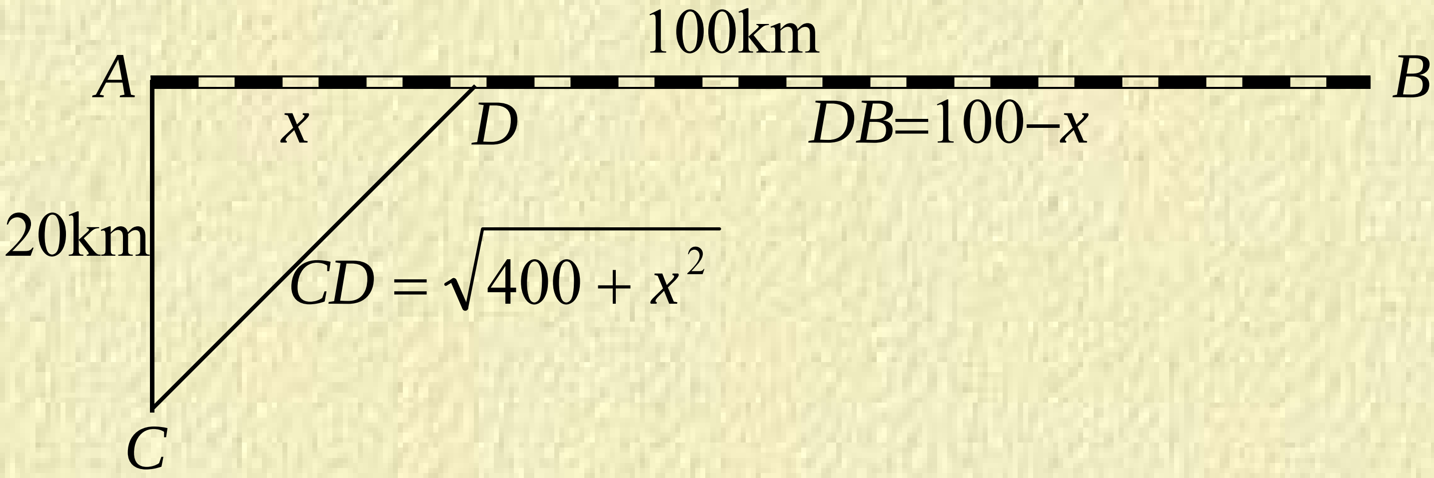
比较可得$f(-3)=20$是 $f(x)$在$[-3, 4]$上的最大值, $f(1)=f(2)=0$是$f(x)$在$[-3, 4]$上的最小值.

例6 工厂C与铁路线的垂直距离AC为20km, A点到火车站B的距离为100km. 欲修一条从工厂到铁路的公路CD. 已知铁路与公路每公里运费之比为3:5. 为了使火车站B与工厂C间的运费最省, 问D点应选在何处?

解 设$AD=x$(km), B与C间的运费为y, 则

$y=5k\cdot CD+3k\cdot DB$ (k是某个正数),

即 $$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x)\ (0\le x\le 100).$$



例6 工厂C与铁路线的垂直距离AC为20km, A点到火车站B的距离为100km. 欲修一条从工厂到铁路的公路CD. 已知铁路与公路每公里运费之比为3:5. 为了使火车站B与工厂C间的运费最省, 问D点应选在何处?

解 设$AD=x$(km), B与C间的运费为y, 则

$$y=5k\cdot CD+3k\cdot DB \quad (k\text{是某个正数}),$$

即

$$y=5k\sqrt{400+x^2}+3k(100-x) \quad (0\le x\le 100).$$

由 $y'=k\left(\dfrac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3\right)=0$, 得 $x=15$.

由于$y|_{x=0}=400k$, $y|_{x=15}=380k$, $y|_{x=100}=500k\sqrt{1+\dfrac{1}{5^2}}$,

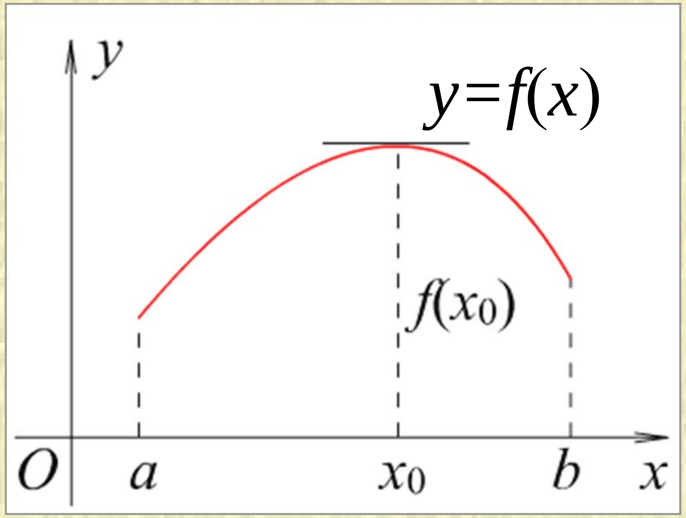
其中以$y|_{x=15}=380k$为最小, 因此当$AD=15$km时, 运费最省.

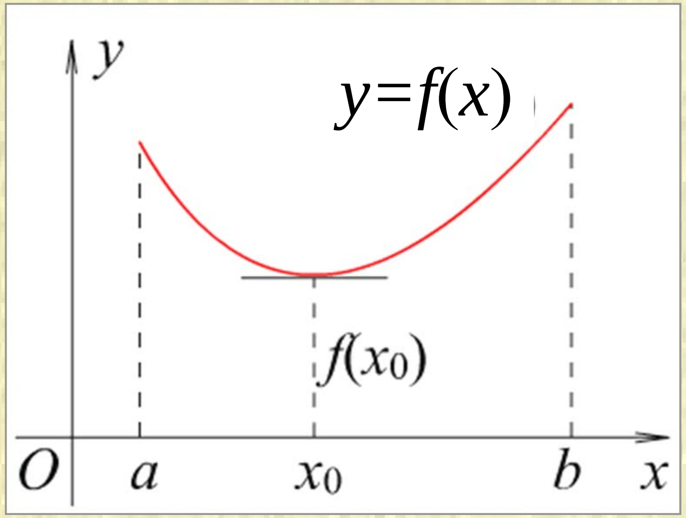
❖特殊情况下的最大值与最小值

如果 $f(x)$在一个区间中可导, 且只有一个驻点 x_0, 那么,

当$f(x_0)$是极大值时, $f(x_0)$就是$f(x)$在该区间上的最大值;

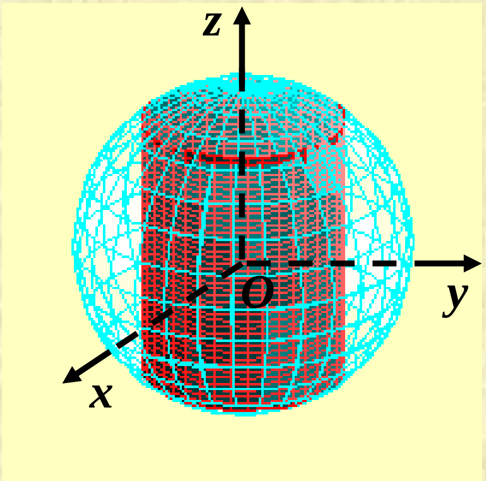
当$f(x_0)$是极小值时, $f(x_0)$就是$f(x)$在该区间上的最小值.





例7 求内接于球的圆柱体的最大体积，设球的半径为R.

解 设圆柱体的高为$2h$,

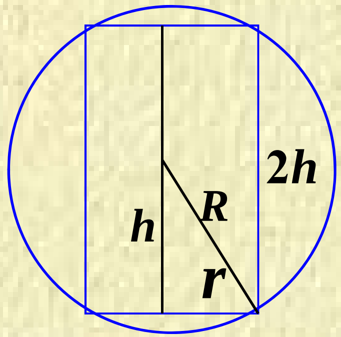


底半径为r，体积为V,

$$V=\pi r^2\cdot 2h$$

由$r^2+h^2=R^2$，得

$$V=2\pi(R^2-h^2)\cdot h,\quad 0<h<R$$



$$V_h'=2\pi(R^2-3h^2)$$

令 $V_h'=0$，得$h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$

例7 求内接于球的圆柱体的最大体积, 设球的半径为R.

解 设圆柱体的高为$2h$,

底半径为r, 体积为V,

$$V=\pi r^2\cdot 2h$$

由$r^2+h^2=R^2$, 得

$$V=2\pi(R^2-h^2)\cdot h,\ 0<h<R$$

$$V_h'=2\pi(R^2-3h^2)$$

令 $V_h'=0$, 得$h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$

圆柱体的最大体积一定存在,

唯一驻点 $h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$

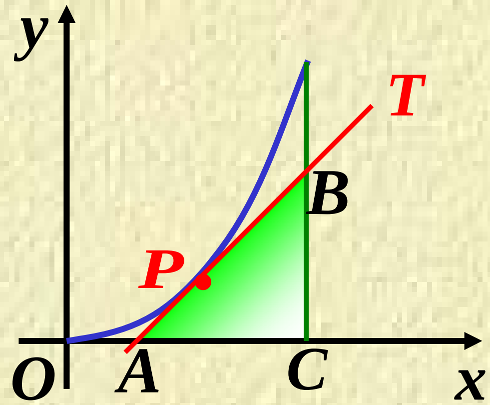
就是最大值点,

最大体积为

$$V=2\pi(R^2-\frac{R^2}{3})\cdot\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$$

例8 由直线 $y=0,\ x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.



解 如图，设所求切点为$P(x_0,y_0)$，

则切线PT为

$$y-y_0=2x_0(x-x_0),$$

$$\Theta\ y_0=x_0^2,\quad \therefore A(\frac{1}{2}x_0,\ 0),\ C(8,\ 0),\ B(8,\ 16x_0-x_0^2)$$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2)\quad (0<x_0<8)$$

$$S'_{x_0}=\left(8-\frac{x_0}{2}\right)^2-x_0\left(8-\frac{x_0}{2}\right)=\left(8-\frac{x_0}{2}\right)\left(8-\frac{3x_0}{2}\right)$$

令$S'_{x_0}=0$，解得 $x_0=\dfrac{16}{3}$，唯一驻点

因这样的面积有最大值，点$P\left(\dfrac{16}{3},\left(\dfrac{16}{3}\right)^2\right)$为所求.

故 $S(\dfrac{16}{3})=\dfrac{4096}{27}$为所有三角形中面积的最大值.

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x_0)(16x_0-x_0^2)=x_0(8-\frac{x_0}{2})^2$$

作 业

习题3–5 (P160):

1.(1) (4) (7)

3.

4.(2)

9.

10.