第三章 微分中值定理与导数的应用

习题课

一、主要内容框图

二、典型例题

一、主要内容框图

Cauchy 中值定理

$F(x)=x$

Lagrange 中值定理

$f(a)=f(b)$

Rolle 定理

$n=0$

Taylor 中值定理

常用的泰勒公式

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y=f^g$ 取对数

$0\cdot\infty$ 型

$f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}$

$\infty-\infty$ 型

$f-g=\dfrac{1/g-1/f}{1/g\cdot 1/f}$

$\dfrac{0}{0}$ 型

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

导数的应用

单调性,极值与最值,
凹凸性,拐点,
函数图形的描绘;
曲率;求根方法.

二、典型例题

例1 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$.

解1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}\cdot[2+\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}\,]$$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\ln(1+\sin^2 x)}=4\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to0}(e^x+\sin x+\cos x)=4$$

二、典型例题

例1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$.

解2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{2-\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{-\dfrac{1}{2\sqrt{4-\ln(1+\sin^2 x)}}\cdot\left(-\dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\right)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x+\sin x}{\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos x}{\cos x}=4$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 $$\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot(1+x^2)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$$

例3 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=0,$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

例4 设方程 $x^3-3xy+y^3=3$ 确定 y 是 x 的隐函数，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它们是否为极值点.

解 方程两边对 x 求导得

$$3x^2-3y-3xy'+3y^2y'=0 \qquad (1)$$

令 $y'=0$，得 $y=x^2$，代入原方程得

$$-2x^3+x^6=3$$

解得驻点 $x=-1\ (y=1)$ 和 $x=\sqrt[3]{3}\ (y=\sqrt[3]{9})$. 由(1)得

$$2x-2y'-xy''+2y(y')^2+y^2y''=0 \qquad (2)$$

$x=-1, y=1, y'=0$ 代入(2)得，$y''(-1)=1>0.$

$x=\sqrt[3]{3}, y=\sqrt[3]{9}, y'=0$ 代入(2)得，$y''(\sqrt[3]{3})=-1<0.$

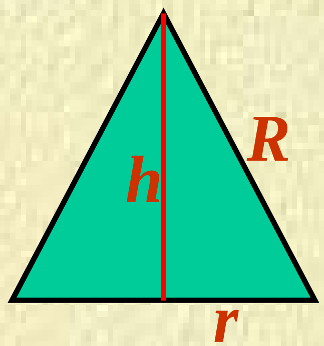
所以 $x=-1$ 为极小值点，$x=\sqrt[3]{3}$ 为极大值点.

例5 从一块半径为 R 的圆形铁皮上, 剪下一块圆心角为 α 的圆扇形, 用剪下的铁皮做一个圆锥形漏斗, 设圆锥形漏斗的高为 h. 问 h 为多大时, 漏斗的容积 V 最大? 此时圆心角 α 为多大?

解 设圆锥底圆半径为 r, 则有

$$r^2 + h^2 = R^2,\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(R^2 h - h^3), (0 < h < R)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2),$$



令 $\dfrac{dV}{dh} = 0$, 得唯一驻点 $h_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$,

此时漏斗的容积 V 最大.

所求圆心角 $\alpha = \dfrac{2\pi r_0}{R} = \dfrac{2\pi\sqrt{R^2 - h_0^2}}{R} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$

例6 设函数 $f(x)$在 (a,b) 内可导, 且$|f'(x)|\le M$, 证明 $f(x)$在 (a,b)内有界.

证明 取点$x_0\in(a,b)$,再取异于 x_0的点 $x\in(a,b)$, 对 $f(x)$在以 x_0, x为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\quad(\xi\text{界于}x_0\text{与}x\text{之间})$$

$$\therefore\quad |f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|$$

$$\le|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|$$

$$\le|f(x_0)|+M(b-a)=K\qquad\text{(定数)}$$

可见对任意 $x\in(a,b)$, $|f(x)|\le K$, 即得所证 .

例7 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证明 $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x[\ln(1+x)-\ln x]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[x, x+1]$ 上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\quad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

例8 证明方程 $x^5+5x^2-1=0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x)=x^5+5x^2-1$, 则 $f(x)$ 在[0, 1]上连续

且 $f(0)=-1, f(1)=5.$

由零点定理, $\exists\, x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$,

x_0 即为方程的一个正根.

当 $x>0$ 时, $f'(x)=5x^4+10x>0$,

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$单调增加, 从而至多有一个正零点.

所以方程 $x^5+5x^2-1=0$ 只有一个正根 x_0.

恒等式的证明

例9 证明当 $x>-1$ 时, $\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

证明 令 $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x},(x>-1)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=0,$$

$\therefore\ f(x)\equiv C,\ (x>-1).$ 而 $C=f(0)=\frac{\pi}{4}$,

因此, 当 $x>-1$ 时, $\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

利用函数的单调性证明不等式

例10 证明：当 $x>0$ 时，$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

证明 令 $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$,

$$f'(x) = e^x - 1 - x,$$

$$f''(x) = e^x - 1,$$

当 $x>0$ 时，$f''(x) > 0$,

$$f'(x) > f'(0) = 0,$$

$$f(x) > f(0) = 0.$$

即得所证.

利用函数的凹凸性证明不等式

例11 证明不等式

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证明 令 $f(t) = t\ln t\ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1,\quad f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$

$\therefore f(t) = t\ln t$ 在 $[x, y]$ 或 $[y, x]$ 是凹的.

于是 $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即 $\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$

利用函数的单调区间和极值确定方程根的个数

例12 若曲线 $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ 与直线 $y = 5x + b$ 有三个不同的交点, 求 b 值的范围.

注: 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 n 个交点, 也就是方程 $f(x)=g(x)$ 有 n 个根.

解 设 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$,

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$,

得驻点 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

当 $x < -3$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$在 $(-\infty,-3]$上单调增加,

值域为 $(-\infty,15]$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$在 $[-3,1]$ 上单调减少,

值域为 $[-17,15]$;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$上单调增加,

值域为$[-17,+\infty)$.

可知 $-17 < b < 15$.

用罗尔定理证明方程 $F'(x)=0$ 在 (a,b) 内存在根

例13 若 $f(x)$ 可导，试证在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $2xf(x)+f'(x)=0$ 的零点.

分析 寻找 $F(x)$，使 $2xf(x)+f'(x)=0$，

化为 $F'(x)=0$.

猜测 $\boxed{F(x)=u(x)f(x).}$

$$F'(x)=u'f+uf'=0,\quad \frac{u'}{u}f+f'=0,$$

$$\frac{u'}{u}=2x,\quad (\ln u)'=(x^2)',\ \ln u=x^2,\quad u=e^{x^2},$$

$$\boxed{F(x)=e^{x^2}f(x).}$$

用罗尔定理证明方程 $F'(x)=0$ 在(a, b)内存在根

例13 若 $f(x)$ 可导，试证在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $2xf(x)+f'(x)=0$ 的零点.

证明 令 $\boxed{F(x)=e^{x^2}f(x).}$

设 $f(x_1)=0, f(x_2)=0,\ \ x_1<x_2,$

则 $F(x_1)=F(x_2)=0,$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$， 使得

$$F'(\xi)=2\xi e^{\xi^2}f(\xi)+e^{\xi^2}f'(\xi)=e^{\xi^2}[2\xi f(\xi)+f'(\xi)]=0$$

$\Theta\ e^{\xi^2}\neq 0,$ 因此必定有

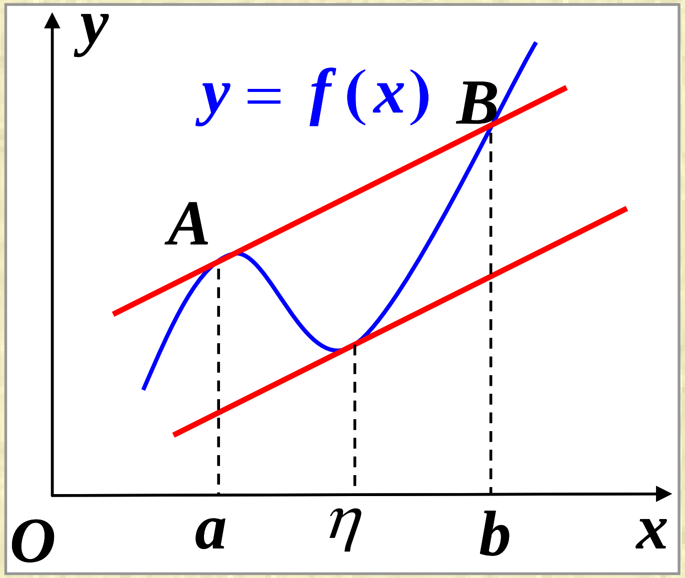
$$2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

例14 设 $f(x)$二阶可导, 过曲线 $y=f(x)$上点 A的切线与曲线 $y=f(x)$有另一交点 B, 证明存在 ξ, 使 $f''(\xi)=0.$

证明 设点 A, B 的坐标分别为 $(a, f(a)), (b, f(b))$,

由题设, 过曲线 $y=f(x)$ 上点 A 的切线斜率为

$$f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



不妨设 $a<b$, 因 $f(x)$ 二阶可导,

由拉格朗日中值定理, 在 (a, b)

内存在一点 η, 使

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a).$$

再由罗尔定理, 在 (a, η) 内存在一点 ξ, 使 $f''(\xi)=0.$

例15 设函数 $f(x)$ 在$[0, 3]$ 上连续, 在$(0, 3)$ 内可导, 且

$$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$$

试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证明 因 $f(x)$ 在$[0, 3]$上连续, 所以在$[0, 2]$上连续, 且在$[0, 2]$上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M$$

$$\longrightarrow\quad m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

分析: 所给条件可写为 $\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1,\ f(3)=1$

想到找一点 c, 使 $f(c)=\dfrac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]$

例15 设函数 $f(x)$ 在$[0, 3]$ 上连续, 在$(0, 3)$ 内可导, 且

$$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$$

试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证明 因 $f(x)$ 在$[0, 3]$上连续, 所以在$[0, 2]$上连续, 且在$[0, 2]$上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M$$

$$\longrightarrow\quad m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1$$

Θ $f(c)=f(3)=1$,且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在$(c,3)$ 内可导,

由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

作业

P180　4.　5.　7.　10.　11.(2)