§4.4 有理函数的积分

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

• 有理函数

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\Lambda+b_m}$$

$m\le n$ 时, $R(x)$ 为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$ 为真分式.

$$\text{有理函数} \xlongequal[\text{相除}]{} \text{多项式} + \text{真分式}$$

例 $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$$

多项式的积分容易计算.

只讨论: 真分式的积分.

•二次有理真分式的积分

例1 求$\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x$

$$(x^2-6x+5)'=2x-6$$

$$=\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x+\int \frac{4}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{(x^2-6x+5)'}{2(x^2-6x+5)}\mathrm{d}x+\int \frac{(x-1)-(x-5)}{(x-1)(x-5)}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{2(x^2-6x+5)}\mathrm{d}(x^2-6x+5)+\int \left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+5|+\ln|x-5|-\ln|x-1|+C$$

•二次有理真分式的积分

例2 求$\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

$$(x^2+2x+3)' = 2x+2$$

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考：如何求$\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

•部分分式的积分

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

$$2.\ \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$3.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$4.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$(p^2-4q<0\,,\ n\neq 1)$$

提示: 变形方法同例2.

变分子为

$$\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}$$

再分项积分,

并利用 P209 例9 .

•二次有理真分式分解为部分分式

$$(1)\ \frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

$$(2)\ \frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x-b)+b}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{x-a}+\frac{b}{(x-a)(x-b)}$$

$$(3)\ \frac{x+C}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$(4)\ \frac{x+C}{(x-a)^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{C+a}{(x-a)^2}$$

例3 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\quad (2)\ \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

解 (1) 待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$x+3=A(x-3)+B(x-2)$$

$$x+3=(A+B)x-(3A+2B)$$

比较系数法

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases}$$

$$A=-5,\ B=6$$

例3 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$； (2) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$.

解 (1) 待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$x+3=A(x-3)+B(x-2)$$

令 $x=2$，得 $A=-5$

令 $x=3$，得 $B=6$

赋值法

故 原式 $=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

例3 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\quad (2)\ \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

解 (2) 拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

可以证明:

有理真分式可分解为部分分式之和.

有理函数可分解为多项式与部分分式之和.

多项式与部分分式均可积出, 它们的原函数都是初等函数.

结论: 有理函数的原函数都是初等函数.

三次真分式的分解形式>>>

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x,\cos x)$ 表示三角函数有理式.

设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则有

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式 .

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $u = \tan\dfrac{x}{2}$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

万能代换

u 的有理函数的积分

$$\int R_1(u)du$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$． $dx=\frac{2}{1+u^2}du$．

例4 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$．

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{(1+\frac{2u}{1+u^2})}{\frac{2u}{1+u^2}(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int(u+2+\frac{1}{u})du=\frac{1}{2}(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$. $dx=\frac{2}{1+u^2}du$.

说明：

并非所有的三角函数有理式的积分都要通过万能代换化为有理函数的积分.用万能代换并不是最好的方法.

请看如下积分:

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{1+\sin x}d(1+\sin x)=\ln(1+\sin x)+C.$$

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{1-u}{1+u}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

例5 求 $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

解 原式 $= \int \frac{1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 4)\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 4}\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2} + C.$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过**根式代换**化为有理函数的积分.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \qquad 令\ t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \qquad 令\ t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

例6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2,\ \mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$原式=\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u=3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$=3[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\ ]+C$$

$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例7 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 为去掉被积函数分母中的根式, 取根指数 2, 3 的最小公倍数 6, 令 $x=t^6$, 则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5 \, dt}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln\left|1+t\right|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例8 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$， $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

$$原式=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)+\ln|x|+C$$

思考题1 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

分母次数较高，宜使用倒代换.

解 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

思考题2　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

注意本题技巧

按常规方法较繁

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

思考题2　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

常规方法步骤：此解法较繁!

1、分解分母 $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$

$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

2、化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A, B, C, D：$-A=C=\frac{\sqrt{2}}{4}, B=D=\frac{1}{2}$.

3、分项积分.

作 业

习题4–4 (P218):

3.

12.

13.

20.

22.

•三次有理真分式分解为部分分式

$$(1)\ \frac{1}{x(x^2+px+q)}=\frac{1}{qx}-\frac{x+p}{q(x^2+px+q)} \quad (q\neq 0)$$ >>>

$$(2)\ \frac{x^2+a_1x+a_2}{(x-a)(x^2+px+q)}=\frac{A}{x-a}+\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (a^2+pa+q\neq 0)$$ >>>

$$(3)\ \frac{x^2+a_1x+a_2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$$(4)\ \frac{x^2+a_1x+a_2}{(x-a)(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}$$

$$(5)\ \frac{x^2+a_1x+a_2}{(x-a)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}$$

•三次有理真分式分解为部分分式

$$(1)\ \frac{1}{x(x^2+px+q)}=\frac{1}{qx}-\frac{x+p}{q(x^2+px+q)}\qquad (q\neq 0)$$

$$=\frac{1}{q}\cdot\frac{(x^2+px+q)-(x^2+px)}{x(x^2+px+q)}$$

•三次有理真分式分解为部分分式

$$(1)\ \frac{1}{x(x^2+px+q)}=\frac{1}{qx}-\frac{x+p}{q(x^2+px+q)} \qquad (q\neq 0)$$

$$(2)\ \frac{x^2+a_1x+a_2}{(x-a)(x^2+px+q)}=\frac{A}{x-a}+\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (a^2+pa+q\neq 0)$$

$$=\frac{(u+a)^2+a_1(u+a)+a_2}{u[(u+a)^2+p(u+a)+q]}$$

$$u=x-a$$

$$=\frac{u+2a+a_1}{(u+a)^2+p(u+a)+q}+\frac{a^2+a_1a+a_2}{u[(u+a)^2+p(u+a)+q]}$$