



§ 4.4 有理函数的积分

- 一、有理函数的积分
- 二、可化为有理函数的积分举例



- **基本积分法:** 直接积分法(分项积分法);
换元积分法; 分部积分法.



例如, 下列函数积分都不是初等函数

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \sqrt{1+x^3} dx.$$



一、有理函数的积分

•有理函数

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \Lambda + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \Lambda + b_m}$$

$m \leq n$ 时, $R(x)$ 为假分式; $m > n$ 时, $R(x)$ 为真分式.

有理函数 $\xrightarrow{\text{相除}}$ 多项式 + 真分式

例 $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$

多项式的积分容易计算.

只讨论: 真分式的积分.



•二次有理真分式的积分

例1 求 $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5} dx$.

解 $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5} dx$

$$(x^2-6x+5)' = 2x-6$$

$$= \int \frac{x-3}{x^2-6x+5} dx + \int \frac{4}{x^2-6x+5} dx$$

$$= \int \frac{(x^2-6x+5)'}{2(x^2-6x+5)} dx + \int \frac{(x-1)-(x-5)}{(x-1)(x-5)} dx$$

$$= \int \frac{1}{2(x^2-6x+5)} d(x^2-6x+5) + \int \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2-6x+5| + \ln |x-5| - \ln |x-1| + C$$



• 二次有理真分式的积分

例2 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$.

$$(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$$

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 3}{x^2 + 2x + 3} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 3)}{x^2 + 2x + 3} - 3 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考：如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2} dx$?



•部分分式的积分

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} (x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$$

$$4. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$$

$$(p^2 - 4q < 0, n \neq 1)$$

提示：变形方法同例2.

变分子为

$$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$$

再分项积分，

并利用 P209 例9 .



例3 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$; (2) $\frac{1}{x(x-1)^2}$. 二次真分式的分解>>>

解 (1) 待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$x+3 = (A+B)x - (3A+2B)$$

比较系数法

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases}$$

$$A=-5, B=6$$



例3 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1) \frac{x+3}{x^2-5x+6}; \quad (2) \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

解 (1) 待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x-2)$$

令 $x=2$, 得 $A=-5$

令 $x=3$, 得 $B=6$

赋值法

故

$$\text{原式} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$



例3 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$; (2) $\frac{1}{x(x-1)^2}$. 三次真分式的分解

解 (2) 拼凑法

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\end{aligned}$$



可以证明:

有理真分式可分解为部分分式之和.

三次真分式的分解形式>>>

有理函数可分解为多项式与部分分式之和.

多项式与部分分式均可积出, 它们的原函数
都是初等函数.

结论: 有理函数的原函数都是初等函数.



说明：将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法。

遇到有理函数的积分要灵活处理

例4 求 $\int \frac{dx}{x(3+x^7)}$.

解法1 原式 $= \int \frac{(3+x^7) - x^7}{3x(3+x^7)} dx = \int \frac{dx}{3x} - \int \frac{x^6}{3(3+x^7)} dx$

$$= \frac{1}{3} \ln |x| - \int \frac{1}{21(3+x^7)} d(3+x^7)$$
$$= \frac{1}{3} \ln |x| - \frac{1}{21} \ln |3+x^7| + C.$$



说明：将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法。

遇到有理函数的积分要灵活处理

例4 求 $\int \frac{dx}{x(3+x^7)}$.

解法2 原式 $= \int \frac{1}{x^8(3x^{-7}+1)} dx$
 $= -\int \frac{1}{21(3x^{-7}+1)} d(3x^{-7}+1)$
 $= -\frac{1}{21} \ln |3x^{-7}+1| + C.$



二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式.

设 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则有

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$



二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

$$\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}$$

万能代换

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

u 的有理函数的积分

$$\int R_1(u) du$$



$$\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则 } \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}. dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

例5 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$.

解 令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{2u}{1+u^2}\right)}{\frac{2u}{1+u^2} \left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(u + 2 + \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln |u|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$



$$\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则 } \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}. dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

说明:

并非所有的三角函数有理式的积分都要通过万能代换化为有理函数的积分. 用万能代换并不是最好的方法.

请看如下积分:

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{1+\sin x} d(1+\sin x) = \ln(1+\sin x) + C.$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1-u}{1+u} \cdot \frac{2}{1+u^2} du$$



例6 求 $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx$.

$$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

解 原式 = $\int \frac{1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 4)\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 4} d(\tan x)$$
$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + C.$$



2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过**根式代换**化为有理函数的积分。例如：

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx, \quad \text{令 } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx,$$

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.



例7 求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$.

解 令 $u = \sqrt[3]{x+2}$, 则 $x = u^3 - 2$, $dx = 3u^2 du$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u} du = 3 \int \frac{(u^2 - 1) + 1}{1+u} du$$

$$= 3 \int \left(u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du$$

$$= 3 \left[\frac{1}{2} u^2 - u + \ln |1+u| \right] + C$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3 \sqrt[3]{x+2} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+2}| + C$$



例8 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

解 为去掉被积函数分母中的根式, 取根指数 2, 3 的最小公倍数 6, 令 $x = t^6$, 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} \\ &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 6 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln |1+t| \right] + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln (1 + \sqrt[6]{x}) + C \end{aligned}$$



例9 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{-2t dt}{(t^2 - 1)^2}$

$$\text{原式} = \int (t^2 - 1)t \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2 \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1 \right) + \ln |x| + C$$



例10 求 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解 法一: 三角代换 $x = \tan t$

法二: 倒代换 $x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= -\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C \end{aligned}$$



思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1. \int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0) \quad 2. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

解 1. 原式 = $\frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2}$

$$= \frac{-1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 - a^3}{x^3 + a^3} \right| + C = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C$$

2. 原式 = $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

$$= \int \frac{d \tan x}{\tan x} + \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = \ln |\tan x| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + C$$



思考题1 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$.

解 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 故

分母次数较高,
宜使用倒代换.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^6}{1+t^2} dt \\ &= -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$



思考题2 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

解 原式 = $\frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C \quad (x \neq 0)$$

注意本题技巧
按常规方法较繁



思考题2 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

常规方法步骤：此解法较繁！

1、分解分母 $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2$
 $= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

2、化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

比较系数定 A, B, C, D : $-A = C = \frac{\sqrt{2}}{4}, B = D = \frac{1}{2}$.

3、分项积分.



作业

习题4-4 (P218):

3.

12.

13.

20.

22.



•二次有理真分式分解为部分分式

$$(1) \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(x-b) - (x-a)}{(x-a)(x-b)}$$
$$= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$$

$$(2) \frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{(x-b) + b}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{x-a} + \frac{b}{(x-a)(x-b)}$$

$$(3) \frac{x+C}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$(4) \frac{x+C}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a} + \frac{C+a}{(x-a)^2}$$



•三次有理真分式分解为部分分式

$$(1) \frac{1}{x(x^2 + px + q)} = \frac{1}{qx} - \frac{x + p}{q(x^2 + px + q)} \quad (q \neq 0)$$
$$= \frac{1}{q} \cdot \frac{(x^2 + px + q) - (x^2 + px)}{x(x^2 + px + q)}$$



• 三次有理真分式分解为部分分式

$$(1) \frac{1}{x(x^2 + px + q)} = \frac{1}{qx} - \frac{x + p}{q(x^2 + px + q)} \quad (q \neq 0)$$

$$(2) \frac{x^2 + a_1x + a_2}{(x - a)(x^2 + px + q)} = \frac{A}{x - a} + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (a^2 + pa + q \neq 0)$$

$$= \frac{(u + a)^2 + a_1(u + a) + a_2}{u[(u + a)^2 + p(u + a) + q]}$$

$$u = x - a$$

$$= \frac{u + 2a + a_1}{(u + a)^2 + p(u + a) + q} + \frac{a^2 + a_1a + a_2}{u[(u + a)^2 + p(u + a) + q]}$$



• 三次有理真分式分解为部分分式

$$(1) \frac{1}{x(x^2 + px + q)} = \frac{1}{qx} - \frac{x + p}{q(x^2 + px + q)} \quad (q \neq 0)$$

$$(2) \frac{x^2 + a_1x + a_2}{(x - a)(x^2 + px + q)} = \frac{A}{x - a} + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (a^2 + pa + q \neq 0)$$

$$(3) \frac{x^2 + a_1x + a_2}{(x - a)(x - b)(x - c)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c}$$

$$(4) \frac{x^2 + a_1x + a_2}{(x - a)(x - b)^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{(x - b)^2}$$

$$(5) \frac{x^2 + a_1x + a_2}{(x - a)^3} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \frac{C}{(x - a)^3}$$