§5.2 微积分基本公式

一、位置函数与速度函数之间的联系

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿—莱布尼茨公式

一、位置函数与速度函数之间的联系

设物体从某定点开始作直线运动，在t时刻物体所经过的路程为$S(t)$，速度为$v=v(t)=S'(t)(v(t)\geq 0)$，则在时间间隔$[T_1, T_2]$内物体所经过的路程S可表示为

$$S(T_2)-S(T_1) \text{ 及 } \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt \text{ ,}$$

即

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = S(T_2)-S(T_1) \text{ .}$$

上式表明，速度函数$v(t)$在区间$[T_1, T_2]$上的定积分等于$v(t)$的原函数$S(t)$在区间$[T_1, T_2]$上的增量.

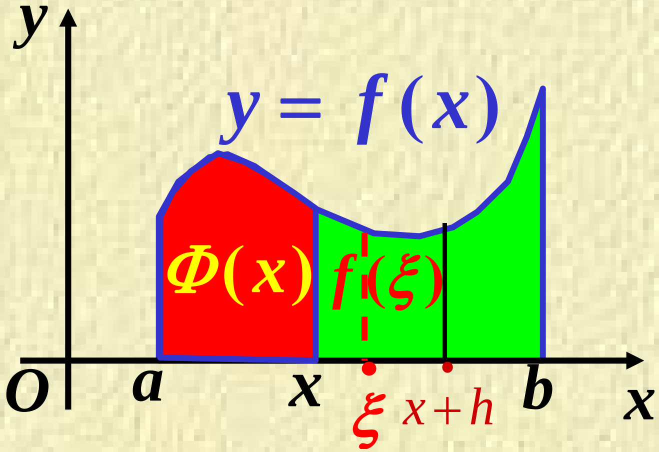
这个特殊问题中得出的关系是否具有普遍意义呢?

二、积分上限的函数及其导数

定理1 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.



证明 $\forall x, x+h\in[a,b]$, 有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\quad(x\le\xi\le x+h)$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(\xi)=f(x)$$

三、牛顿--莱布尼茨公式

定理2(牛顿--莱布尼茨公式)

若$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ .$$

证明 设 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$， 则也是 $f(x)$的原函数.

因为$F(x)$和$\Phi(x)$都是$f(x)$的原函数, 所以存在常数C, 使

$$F(x)-\Phi(x)=C.$$

由$F(a)-\Phi(a)=C$及$\Phi(a)=0$, 得$C=F(a)$, $F(x)-\Phi(x)=F(a)$.

由$F(b)-\Phi(b)=F(a)$, 得$\Phi(b)=F(b)-F(a)$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ .$$

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理2（牛顿—莱布尼茨公式）

若$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

为了方便起见，可把 $F(b)-F(a)$记成$[F(x)]_a^b$，于是

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) .$$

牛顿—莱布尼茨公式揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系.

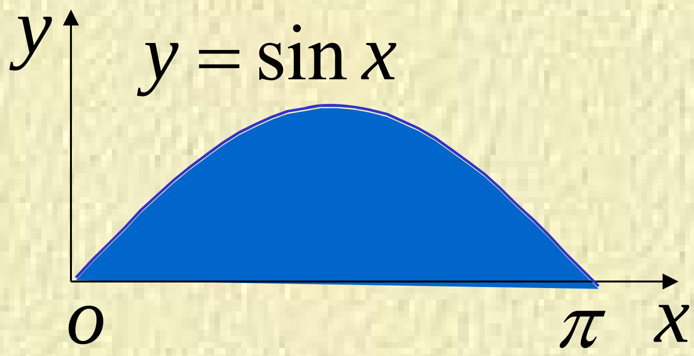
若 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，则 $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

例1 计算 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$.

解 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$.

例2 计算正弦曲线$y=\sin x$在$[0, \pi]$上与x轴所围成的平面图形的面积A.

解 $A=\int_0^{\pi}\sin x dx$



$=[-\cos x]_0^{\pi}$

$=-(-1)-(-1)=2$.

例3 汽车以每小时36km速度行驶，到某处需要减速停车.设汽车以等加速度$a=-5\text{m/s}^2$刹车．问从开始刹车到停车，汽车走了多少距离?

解 汽车刹车时的初速度为

$$v_0=36\text{km/h}=\frac{36\times1000}{3600}\text{m/s}=10\text{m/s}.$$

刹车后 t 时刻汽车的速度为

$$v(t)=v_0+at=10-5t.$$

当汽车停止时，有

$$v(t)=10-5t=0,\quad t=2(s).$$

于是从开始刹车到停车汽车所走过的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(10-5t)dt=[10t-5\cdot\frac{1}{2}t^2]_0^2=10\,(\text{m}).$$

例4 求 $\int_0^1 |x(2x-1)|\,\mathrm{d}x$

解 令 $x(2x-1)=0 \Rightarrow \quad x=0, x=\dfrac{1}{2}.$

当 $0\le x\le \dfrac{1}{2}$ 时, $\quad x(2x-1)\le 0;$

当 $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$ 时, $\quad x(2x-1)\ge 0.$

$$\text{原式}=-\int_0^{\frac{1}{2}} x(2x-1)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x(2x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

注: 如被积函数有绝对值,应分区间将绝对值去掉后, 再用 N-L公式.

例5　已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 当-1\le x<0时,\\ x, & 当0\le x\le 1时,\\ x+1, & 当1<x\le 2时.\end{cases}$

求积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

解　当 $x\in[-1,0)$ 时，$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x} 1\mathrm{d}t=x+1.$

当 $x\in[0,1]$ 时，$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} 1\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t=1+\dfrac{x^2}{2}.$

当 $x\in(1,2]$ 时，

$$\Phi(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} 1\mathrm{d}t+\int_{0}^{1} t\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t=x+\frac{x^2}{2}.$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}x+1, & 当-1\le x<0时,\\ 1+\frac{1}{2}x^2, & 当0\le x\le 1时,\\ x+\frac{1}{2}x^2, & 当1<x\le 2时.\end{cases}$$

例6 设$f(x)$连续, $u_1(x)$, $u_2(x)$可导, 则有

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t)dt = f[u_2(x)]\cdot u_2'(x) - f[u_1(x)]\cdot u_1'(x).}$$

证明 设$F(x)$为$f(x)$的一个原函数, 则有

$$\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t)dt = F[u_2(x)] - F[u_1(x)]$$

于是

$$\frac{d}{dx}\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t)dt$$

$$= F'[u_2(x)]\cdot u_2'(x) - F'[u_1(x)]\cdot u_1'(x)$$

$$= f[u_2(x)]\cdot u_2'(x) - f[u_1(x)]\cdot u_1'(x).$$

例6 设$f(x)$连续，$u_1(x)$, $u_2(x)$可导，则有

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t)dt = f[u_2(x)]\cdot u_2'(x) - f[u_1(x)]\cdot u_1'(x).}$$

例7 设$f(x)=\int_{x^3}^{x^2} e^t \mathrm{d}t$，求$f'(x)$.

解 $f'(x)=e^{x^2}(x^2)'-e^{x^3}(x^3)'=e^{x^2}\cdot 2x-e^{x^3}\cdot 3x^2$

例8 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}=\dfrac{1}{2e}$.

例9 设$f(x)$为连续的周期函数，周期为T，试证

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

证明 $\Theta\ \dfrac{d}{da}\int_a^{a+T} f(x)dx$

$$= f(a+T) - f(a) = 0,$$

$$\therefore \int_a^{a+T} f(x)dx \equiv C,$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

例10 设$f(x)$在$[0, +\infty)$内连续, 且$f(x)>0$. 证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在$(0, +\infty)$内为单调增加函数.

证明 因为

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}.$$

按假设, 当$0<t<x$时, $f(t)>0$, $(x-t)f(t)>0$, 所以

$$\int_0^x f(t)dt>0\,,\quad \int_0^x (x-t)f(t)dt>0\,,$$

从而$F'(x)>0(x>0)$, 因此$F(x)$在$(0, +\infty)$内为单调增加函数.

例11 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=[\arctan x]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

例12 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解 定积分为常数, 故应用积分法定此常数.

设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=b$, 则

$$f(x)=x^2-bx+2a$$

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{b}{2}+2a$$

$$b=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^2=\frac{8}{3}-2b+4a$$

$$\Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3} \Longrightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

例13 试证：$1-\frac{\pi}{4} \le \int_0^1 \frac{x^2}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \le \frac{1}{3}.$

证明 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$= [x-\arctan x]_0^1$$

$$= 1-\frac{\pi}{4}.$$

•性质7(定积分中值定理) 如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点ξ, 使下式成立:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ .}$$ ——积分中值公式.

注: 积分中值定理中的 ξ 可在开区间 (a, b) 内取得.

证明 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \ (a \le x \le b)$,

由定理1 (原函数存在定理)知: $F(x)$在$[a,b]$上可导, $F'(x) = f(x)$. 根据拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a),$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

作 业

习题5–2 (P240):

5.(3)

6. (7)—(12)

9.

10.

12.