院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2013-2014 学年第二学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ2　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	21	14	24	16	10					100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．设 $z=\cos x\sin y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin x\sin y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$.

2．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=-\dfrac{1}{4}$.

3．已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f_x(0,0)=0$.

4．$\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=1$，其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

二、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 21 分）

1．求函数 $z=x^2y+\dfrac{x}{y}$ 的偏导数和全微分.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy+\dfrac{1}{y}$，------2 分　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-\dfrac{x}{y^2}$，------5 分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(2xy+\frac{1}{y})\mathrm{d}x+(x^2-\frac{1}{y^2})\mathrm{d}y.$$ ------7 分

2．设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，$u=x^2-y^2$，$v=xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$------2 分

$=2xf_u+yf_v$，------4 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{uu}+(2x^2-2y^2)f_{uv}+f_v+xyf_{vv}$------7 分

3．设由方程 $e^z-xyz=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：令 $F=e^z-xyz$，则 $F_x=-yz$，$F_z=e^z-xy$，------3 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$.------5 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{yz}{e^z-xy})\quad=\frac{2y^2z-y^2z^2e^z-2xzy^3}{(e^z-xy)^3}$.------7 分

三、（本题满分 14 分）

求函数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases}f_x=3x^2-3y=0\\ f_y=3y^2-3x=0\end{cases}$$，------4 分

得驻点 $(0,\ 0)$，$(1,1)$.------6 分

$A=f_{xx}=6x$，$B=f_{xy}=-3$，$C=f_{yy}=6y$.------9 分

在点 $(0,\ 0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，所以 $f(0,\ 0)$ 不是极值；------11 分

在点 $(1,\ 1)$ 处，$AC-B^2=27>0$，且 $A=6>0$，

所以 $f(1,\ 1)=-1$ 为极小值；------14 分

四、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 24 分）

1．计算 $\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x, y=\frac{x}{2}, x=2$ 所围成的有界闭区域.

解：$\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$------4 分

$=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{sinx}\,\mathrm{d}x$------6 分

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2)$. ------8 分

2．计算 $\iint\limits_{D}e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=9$ 所围成的有界闭区域.

解：$\iint\limits_{D}e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\delta=\iint\limits_{D}e^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$------3 分

$=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{3}\rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$------5 分

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{3}e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2$------6 分

$=\pi(\mathrm{e}^9-1)$------8 分

3．计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$，$2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解：$V=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{1}(6-2x-3y)dx$------4 分

$=\frac{7}{2}$------8 分

五、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 16 分）

1．求微分方程 $y' + 2xy = 4x$ 的通解.

解：由通解公式得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 4x \cdot e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) \text{------4 分}$$

$$= 2 + Ce^{-x^2}. \text{------8 分}$$

2．求微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$， $y'|_{x=0} = 0$ 的特解.

解：特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$，特征根为 $r_1 = r_2 = -1$，

通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. ------4 分

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2(1-x)e^{-x},$$

由初始条件 $y|_{x=0} = 2$， $y'|_{x=0} = 0$，得 $C_1 = 2$， $C_2 = 2$.

所求特解为 $y = 2e^{-x} + 2xe^{-x}$. ------8 分

六、（本题满分 10 分）

一个煮熟了的鸡蛋有 $98\ ^{\circ}C$，把它放在 $18\ ^{\circ}C$ 的水池里，10 分钟后，鸡蛋的温度是 $38\ ^{\circ}C$．假定没有感到水变热，鸡蛋冷却到 $23\ ^{\circ}C$ 需要多长时间？

解：从鸡蛋放在水池里起开始记时，设在时刻 t 鸡蛋的温度为 $T(t)$，那么根据冷却定律得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-18)\text{，其中 } k > 0 \text{ 为冷却系数. ------3 分}$$

方程分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}T}{T-18} = -k\,\mathrm{d}t$，两边积分得 $\ln(T-18) = -kt + C$. ------6 分

由 $T(0) = 98$ 得 $C = \ln 80$，再由 $T(10) = 38$ 得 $k = \dfrac{\ln 4}{10}$. ------8 分

令 $T(t) = 23$，得 $t = 20$. ------10 分

鸡蛋冷却到 $23\ ^{\circ}C$ 需要再经过 10 分钟.