院、系领导 审批并签名		B 卷

广州大学 2014-2015 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	14	11	12	18	8	7			100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}=\underline{\dfrac{2^{20}3^{30}}{5^{50}}}$.

2．若函数 $y=\ln\sqrt{3}$，则 $y'=\underline{\ 0\ }$.

3．曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点（4，2）处的切线方程是 $\underline{x-4y+4=0}$.

4．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x}，则 $f(x)=\underline{-e^{-x}}$.

5．设 $y=f(x^4)$，且 $y=f(u)$ 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{4x^3f'(x^4)}$.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．当 $x\to0$ 时，$\sin x^4$ 是 x^4 的（ D ）无穷小.

(A) 高阶； (B) 低阶； (C) 同阶但不等价； (D) 等价.

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的（ A ）.

(A) 充分条件； (B) 必要条件；(C) 充要条件； (D) 无关条件.

3．设 $F'(t)$ 连续，则 $\int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t=$（ B ）.

(A) $F(x)$； (B) $F(x)-F(a)$； (C) $\mathrm{d}F(x)$； (D) $F(x)+C$.

4．$\int_0^{+\infty}e^{-5x}\,\mathrm{d}x=$（ A ）.

(A) 1/5； (B) -1/5； (C) 5； (D) -5.

5．下列说法正确的是（ A ）.

(A) 零是无穷小； (B) 无穷小是很小很小的数；

(C) 无穷个无穷小的乘积是无穷小； (D) 无穷大与无穷小的乘积是无穷小.

三、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 14 分）

1．验证函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式 $y^3y''+1=0$．

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2x-x^2)'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，------3 分

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=-\frac{1}{(2x-x^2)^{3/2}}=-\frac{1}{y^3}\text{，------6 分}$$

所以 $y^3y''+1=0$ 证毕. ------7 分

2．设由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$．

解：方程两边对 x 求导，得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-e^x+e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}$. ------5 分

由原方程知，当 $x=0$ 时，$y=0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}\Big|_{x=0,\,y=0}=1$．------7 分

四、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$，试判断间断点 $x=0$，$x=\pm1$ 的类型，请精确到是第几类中的什么间断点.

解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-1}=-1$，

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. ------5 分

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty,$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点. ------8 分

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2},$$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. ------11 分

五、计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$ ------4 分

$=\dfrac{1}{e}$. ------6 分

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ ------4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$． ------6 分

六、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．$\int x\sqrt{1-x^{2}}\,\mathrm{d}x$.

解：原式$=-\dfrac{1}{2}\int(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^{2})$ ------3 分

$=-\dfrac{1}{3}(1-x^{2})^{\frac{3}{2}}+C$． ------6 分

2．$\int_{2}^{4}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解：令$t=\sqrt{x-1}$，则$x=t^{2}+1$，$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，

原式$=\int_{1}^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{(t^{2}+1)t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int_{1}^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{t^{2}+1}\,\mathrm{d}t$ ------3 分

$=[2\arctan t]_{1}^{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$. ------6 分

3. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

解：原式$=x\ln(1+x^2)\big|_0^1-2\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ ------3 分

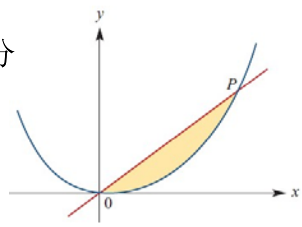
$$=\ln 2-2\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x \quad \text{------4 分}$$

$$=\ln 2-2(x-\arctan x)\big|_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}. \quad \text{------6 分}$$

七、（本题满分 8 分）

求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x$ 所围成的区域面积.

解：解方程组$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$，得 P 点的坐标是$(2,4)$. ------2 分



所求的面积为

$$A=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x \quad \text{------5 分}$$

$$=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}. \quad \text{------8 分}$$

八、（本题满分 7 分）

证明方程 $x^5+x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且只有一个根.

证明：令 $f(x)=x^5+x+1$，因 $f(x)$ 在闭区间$[-1,0]$连续，且

$$f(-1)=-1<0，\quad f(0)=1>0，$$

根据零点定理 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有一个零点. ------3 分

另一方面，对于任意实数 x，有 $f'(x)=5x^4+1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，因此 $f(x)$ 至多只有一个实零点. ------6 分

综上所述，$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且只有一个零点，也即方程 $x^5+x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有且只有一个根. ------7 分