院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2014-2015 学年第二学期考试卷解答

课 程：线性代数Ⅰ、Ⅱ **考 试 形 式：闭卷考试**

学院：__________ 专业班级：__________ 学号：____________ 姓名：__________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分	评卷人
分 数	15	15	8	8	10	12	12	8	12	100	
得 分											

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 121 & 133 & -985 \\ 1 & 122 & 0 \\ -155 & 199 & 666 \end{vmatrix}$ 中第 3 行第 2 列元素的代数余子式值为___985___.

2．已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$，则 $|3A^{-1}-\frac{1}{2}A^*|=$ ___**4**___.

3．若 3 阶方阵 A 的秩是 3，$R(B)=2$，则 $R(AB)=$___2___.

4．已知一个三元非齐次线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & k & 1 \\ 0 & k-2 & 8-4k & 1 \end{array}\right),$$

则 $k=$___2___时，方程组无解.

5．设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\beta$ 线性相关，则 α,β,γ 线性___相关___.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．关于等式 $AC=BC$，若 A,B,C 是方阵且 $C\neq O$，则必有【 B 】.

（A）$A=O$ 或 $B=O$； （B）当 $|C|\neq 0$ 时，$A=B$；

（C）$|A-B|=0$ 且 $|C|=0$； （D）$A\neq B$.

2．设 $|A|\neq 0$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A$，则【 C 】.

（A）交换 A^{-1} 的第 2，3 列得到 B^{-1}；

（B）A^{-1}的第 2 行乘$\dfrac{1}{2}$得到B^{-1}；

（C）A^{-1}的第 2 列乘$\dfrac{1}{2}$得到B^{-1}；

（D）A^{-1}的第 3 列乘$\dfrac{1}{2}$得到B^{-1}.

3．若向量$\alpha=(2,\ 0,\ 1,\ 2)^T$与$\beta=(1,\ 0,\ t,\ 1)^T$ 线性相关，则t满足【 A 】.

（A）$t=\dfrac{1}{2}$；　（B）$t=0$；　（C）$t=1$；　（D）$t=2$.

4．如果线性方程组$AX=O$只有零解，A是m行n列的矩阵，那么以下判断正确的是【 B 】.

（A）A的列向量组线性无关，m比n小；

（B）$AX=B$可能无解；

（C）$AX=B$（$B\neq O$）可能有无穷多解；

（D）$R(\boldsymbol{A},B)=R(\boldsymbol{A})$.

5．设λ是方阵A的一个特征值，若A可逆，则以下说法错误的是【 D 】.

(A) $\lambda^{-1}|A|$是A^*的一个特征值；　(B) $\lambda\neq 0$；

(C) λ对应的特征向量$\neq O$；　（D）$\lambda=0$.

三、（本题满分 8 分）

设$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-6&1\end{pmatrix}$，求$A^8$.

解　令$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}$.……………2 分

因为：$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$,所以：$\boldsymbol{A}_1^8=(\boldsymbol{A}_1^2)^4=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}5^4&0\\0&5^4\end{pmatrix}$ ……4 分

又因：$\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-12&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_2^3=\boldsymbol{A}_2^2.\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\-12&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-18&1\end{pmatrix}$,类推：$\boldsymbol{A}_2^8=\begin{pmatrix}1&0\\-48&1\end{pmatrix}$,　……7 分

综上：$\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-48&1\end{pmatrix}$。　……………8 分

四、（本题满分 8 分）

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

解： $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & 2 \end{vmatrix}$ …………3 分

$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ …………6 分

$=16$ ……………………………………………8 分

五、（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$， $AB=A-B$，求 B.

解：由 $AB=A-B$，得 $(A+E)B=A$ ………………………………2 分

$$(A+E \vdots A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & \vdots & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ …8 分

所以 $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ………………………………10 分

六、（本题满分 12 分）

求方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$的通解并说明其结构.

解：对增广矩阵实施行初等变换化为行最简形：

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$ ……………4 分

$$:\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………6 分

同解方程组为 $\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3+\frac{1}{2}\\\boldsymbol{x}_4=0\end{cases}$

令 $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{k}_2$，得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$，其中 k_1,k_2 为任意实数………………9 分

此式表明：

方程组的通解是它的一个特解与 $AX=0$ 的通解的和，这里的 $(\frac{1}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ 是特解，$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1/2,1,0,\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1/2,0,1,\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系。…………12 分

七、（本题满分 12 分）

设有向量组 A：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}.$$

（1）求向量组 A 的秩；

（2）求向量组 A 的一个最大无关组 A_0；

（3）请用最大无关组 A_0 线性表示在向量组 A 中但非 A_0 中的向量.

解： $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&1&3&5\\1&3&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&-1&-1&-1\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&0&2\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$ ……………………………6 分

向量组 A 的秩为 3 ……………………………8 分

向量组 A 的一个最大无关组 A_0： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， ……………………………10 分

$\alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$。 ……………………………12 分

八.（本题满分 8 分）

设 β 能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，且表示式唯一，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明：若 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，且表法唯一，

则方程 $\boldsymbol{x}_1\alpha_1+\boldsymbol{x}_2\alpha_2+\ldots+\boldsymbol{x}_r\alpha_r=\beta$ 有唯一解。 ……………….3 分

从而 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta)=r$， ……………….6 分

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. ……………….8 分

九.（本题满分 12 分）

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$是方阵$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\m&1&3\\4&0&n\end{pmatrix}$的一个特征向量.

（1）求α_1所对应的特征值λ_1及参数m,n的值；

（2）求A其余的特征值和对应的所有的特征向量.

解：依题意：$\boldsymbol{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，即：

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\m&1&3\\4&0&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\3\lambda_1\\4\lambda_1\end{pmatrix},$$

由此得：$\lambda_1=6,\boldsymbol{m}=3,\boldsymbol{n}=5$。 ……………………………………….……….5 分

所以$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$. 设$A$的其余两特征值为$\lambda_2$，$\lambda_3$，则

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A)=2+1+5\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=6\end{cases},$$

故：$\lambda_2+\lambda_3=2$，$\lambda_2\lambda_3=1$，从而：$\lambda_2=\lambda_3=1$. …………9 分

解方程$(I-A)X=0$，得基础解系

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T,$$

因此，矩阵 A 对应$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为：

$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$（$\forall k_2,k_3\in R$且不全为零）……12 分