院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2015-2016 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时）　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	16	12	18	8	10	6			100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}\cos n=$ __ 0 __.

2．曲线 $y=2x^3+1$ 在点 $(1,\ 3)$ 处的切线与 y 轴的夹角为 α 且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，则

$\alpha=$ __ $\arctan\dfrac{1}{6}$ __.

3．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=$ __ $-2f'(x_0)$ __.

4．曲线 $y=x^3$ 的拐点坐标为 __ $(0,\ 0)$ __.

5．当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1$ 与 $-\dfrac{1}{2}x^a$ 为等价无穷小，则 $a=$ __ 2 __.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的 ξ 有（　B　）个.

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3.

2．函数 $f(x)$ 在某点导数存在是函数在该点连续的（　A　）.

（A）充分条件；　（B）必要条件；　（C）充要条件；　（D）无关条件.

3．下列说法正确的是（　C　）.

（A）两个无穷大的和是无穷大；　　（B）零不是无穷小；

（C）无穷小与无穷小的乘积是无穷小；　（D）无穷小与无穷小的商是无穷小.

4． $\dfrac{\mathrm{d}(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}=$（　A　）.

（A）0；　（B）e^{x^2}；　（C）e^{t^2}；　（D）$e^{x^2}+c$（c为任意常数）.

5．设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，若 $f(a)\cdot f(b)>0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有（　D　）个零点.

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）以上都有可能.

三、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 16 分）

1．证明：函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式 $y^3y''+1=0$.

证　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2x-x^2)'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，------4 分

$$y''=\frac{(1-x)'\cdot\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot(\sqrt{2x-x^2})'}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{(2x-x^2)^{3/2}}=-\frac{1}{y^3},$$

$\Rightarrow y^3y''+1=0$。------8 分

2．求方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，------4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}$$

$$=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$ ------8 分

四、计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$．

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$------3 分

$=e^{-1}$.------6 分

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}$------3 分

=0. ------------6 分

五、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．$\int\dfrac{1}{a^2+x^2}dx$.

解：原式$=\int\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\ dx$------2 分

$=\dfrac{1}{a}\int\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\ d\left(\dfrac{x}{a}\right)$------4 分

$=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$.------6 分

2. $\int x^2 e^x dx$.

解 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$

$$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \text{------3 分}$$

$$= x^2 e^x - 2\int xde^x$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C. \text{------6 分}$$

3. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx$.

解 原式 $= -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$------2 分

$$= \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \text{------4 分}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 1. \text{------6 分}$$

六、(本题满分 8 分)

求由 $y^2 = 2x$ 和 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 的交点为 $(2, -2)$ 和 $(8, 4)$，------2 分

面积微元:

$$dA = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy, \text{------4 分}$$

所求面积:

$$A = \int_{-2}^{4} dA = \int_{-2}^{4}\left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} = 18. \text{------8 分}$$

七、（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\neq 1,\quad x\neq -2,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，常数 a 与 b 应如何取值？

解　因为 $f(1)=2$，为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，只要

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=2. \qquad (*)$$ ------2 分

而要使 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}$ 存在，须 $\lim\limits_{x\to 1}(x^4+ax+b)=0$，即 $1+a+b=0$，

得 $a=-(b+1)$，------4 分

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-(b+1)x+b}{(x-1)(x+2)}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-b)}{(x-1)(x+2)}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-b}{x+2}=\frac{3-b}{3}.\end{aligned}$$ ------8 分

由（*），得 $b=-3\Rightarrow a=-(-3+1)=2$.

所以当 $a=2$，$b=-3$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. ------10 分

八、（本题满分 6 分）

证明方程

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

有分别包含于(1，2)，(2，3)内的两个实根.

证　当 $x\neq 1, 2, 3$ 时，用 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 乘方程两端，得

$$(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)=0.$$ ------2 分

设 $f(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$，则

$$f(1)=2>0,\quad f(2)=-1<0,\quad f(3)=2>0,$$ ------4 分

由零点定理知，$f(x)$ 在 $(1, 2)$ 与 $(2, 3)$ 内至少各有一个零点，即原方程在 $(1, 2)$ 与 $(2, 3)$ 内至少各有一个实根. ------6 分