院、系领导 审批并签名		B 卷

广州大学 2015-2016 学年第二学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时）　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	总 分	评卷人
分 数	18	18	21	21	14	8	100	
得 分								

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．函数 $z=\dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域为 $\underline{D=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}}$

2．设平面过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$，则该平面方程为 $\underline{x+3y=0}$

3．函数 $z=\dfrac{x}{y}$ 在 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=-0.1,\ \Delta y=0.1$ 时的全增量为 $\underline{-\dfrac{1}{14}}$

4．二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{|x|\le 1,\,|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号为____负____

5．设积分区域 D 由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成，则二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D xy^2 f(x^2+y^2)dxdy=$ ____0____

6. 微分方程 $y''+5y'+6y=e^{3x}$ 的待定特解形式为 $y^*=\underline{be^{3x}}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在是它在该点可微的（　B　）

(A) 充分必要条件；　　(B) 必要非充分条件；

(C) 充分非必要条件；　　(D) 既非充分又非必要条件.

2．二元函数极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}=$（ D ）

(A) $\dfrac{1}{3}$；　(B) $-\dfrac{1}{3}$；　(C) $\dfrac{1}{6}$；　(D) $-\dfrac{1}{6}$.

3．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处（ C ）.

(A) 连续且偏导数存在；　(B) 连续但偏导数不存在；

(C) 不连续但偏导数存在；　(D) 不连续且偏导数不存在.

4. 设平面区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2\le 1\}$，若$I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，则有（ A ）.

(A) $I_1<I_2$；　(B) $I_1=I_2$；　(C) $I_1>I_2$；　(D) 不能比较.

5. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$，$f(u)$ 是区域 D 上的连续函数，则$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ 等于（ C ）.

(A) $2\pi\int_1^2 rf(r^2)dr$；　(B) $2\pi\left[\int_0^2 rf(r^2)dr-\int_0^1 rf(r^2)dr\right]$；

(C) $2\pi\int_1^2 rf(r)dr$；　(D) $2\pi\left[\int_0^2 rf(r)dr-\int_0^1 rf(r)dr\right]$

6．下列方程中，设y_1,y_2是它的解，可以推知y_1+y_2也是它的解的方程是（ B ）.

(A) $y'+p(x)y+q(x)=0$；

(B) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$；

(C) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$；

(D) $y''+p(x)y'+q(x)=0$.

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1. 设 $f(x,y)=e^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\dfrac{x}{y}$，试求 $f_x(1,1)$ 及 $f_y(1,1)$.

解：$f(x,1)=(x-1)\arctan x,\ f(1,y)=e^{y}\sin\pi y,$ ------2 分

$f_x(x,1)=\arctan x+(x-1)\dfrac{1}{1+x^2},$ ------4 分

$f_x(1,1)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}.$ ------5 分

$f_y(1,y)=e^{y}\sin\pi y+\pi e^{y}\cos\pi y$ ------6 分

$f_y(1,1)=\pi e\cos\pi=-\pi e.$ ------7 分

2. 求 $z=f(xy,x-y)$ 的偏导数和全微分(其中 $f(u,v)$ 具有连续偏导数).

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=yf_1'+f_2'$ ------2 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=xf_1'-f_2'$ ------4 分

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=(yf_1'+f_2')dx+(xf_1'-f_2')dy$ ------7 分

3. 已知 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\sin z+z=x^2y$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：令 $F(x,y,z)=\sin z+z-x^2y$, 则

$F_x=-2xy$, $F_z=\cos z+1$ ------2 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{2xy}{\cos z+1}$ ------4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y(\cos z+1)-2xy\cdot(-\sin z\cdot z_x)}{(\cos z+1)^2}$ ------6 分

$=\dfrac{2y(\cos z+1)^2+4x^2y^2\sin z}{(\cos z+1)^3}$ ------7 分

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} xydxdy$，其中积分区域 D 由 $y^2=x$ 和 $y=x-2$ 围成.

解：$I=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}xydx$ ------3 分

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]dy$ ------5 分

$=\frac{45}{8}$ ------7 分

2. 设 D 为半圆: $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$, 计算 $I=\iint\limits_{D}\frac{y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：$I=\iint\limits_{D}\frac{r\sin\theta}{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ ------2 分

$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^2\sin\theta}{1+r^2}\mathrm{d}r$ ------4 分

$=2\int_0^1\frac{r^2}{1+r^2}\mathrm{d}r$ ------5 分

$=2\int_0^1(1-\frac{1}{1+r^2})\mathrm{d}r=2(1-\frac{\pi}{4})$ ------7 分

3. 证明 $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1(e-e^{x^2})f(x)dx$.

证: 等式左端二次积分的积分限: $0\le y\le 1, 0\le x\le\sqrt{y}$

可改写为 $0\le x\le 1, x^2\le y\le 1$ ------2 分

于是

$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 e^y f(x)dy$ ------4 分

$=\int_0^1 f(x)[e^y]\Big|_{x^2}^{1}\,dx$ ------6 分

$=\int_0^1(e-e^{x^2})f(x)dx$ ------7 分

五、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．求微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos x}{x}$ 的通解.

解：$y=\exp(-\int\frac{1}{x}dx)\left[\int\frac{\cos x}{x}\exp(\int\frac{1}{x}dx)dx+c\right]$ ------3 分

$=\exp(-\ln x)\left[\int\frac{\cos x}{x}\exp(\ln x)dx+c\right]$ ------5

$=\frac{1}{x}(\int\cos xdx+c)=\frac{1}{x}(\sin x+c)$ ------7 分

2．求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 的特解.

解：特征方程为 $r^2-4r+3=0$

特征根为 $r_1=1, r_2=3$ ------2 分

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ ------4 分

$y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$

由初始条件 $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$，得 $C_1=4$， $C_2=2$. ------6 分

所求特解为 $y=4e^x+2e^{3x}$ ------7 分

六、（本题满分 8 分）

某厂生产甲乙两种产品，计划每天的总产量为 42 件，如果生产甲产品 x 件，生产乙产品 y 件，则总成本函数为

$$f(x,y)=8x^2-xy+12y^2$$

单位为元，求最小成本.

解：问题为求

$$f(x,y)=8x^2-xy+12y^2$$

在限制条件为 $x+y=42$ 下的条件极值问题

令 $F(x,y,\lambda)=8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42)$ ------3 分

从 $\begin{cases} F_x=16x-y+\lambda=0 \\ F_y=-x+24y+\lambda=0 \\ F_\lambda=x+y-42=0 \end{cases}$ ------6 分

解得 $x=25,\ y=17$

根据问题本身的意义及驻点的唯一性即知，应计划每天生产甲产品 25 件，乙产品 17 件，才能取得最小的成本，为 $f(25,17)=8043$ 元 ------8 分