院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2017-2018 学年第一学期考试卷

参考解答与评分标准

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时）　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分	评卷人
分 数	15	15	10	18	18	8	10	6	100	
得 分										

特别提醒：2017 年 11 月 1 日起，凡考试作弊而被给予记过（含记过）以上处分的，一律不授予学士学位。

一、填空题（本大题满分 15 分，每小题 3 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^n=$ $\underline{\quad\sqrt{e}\quad}$．

2．当 $x\to 0$ 时，与 $\cos 2x-1$ 是等价无穷小的幂函数为 $\underline{\quad -2x^2\quad}$．

3．曲线 $y=x^2+2x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\quad 2x-y+1=0\quad}$．

4．函数 $y=12x-x^3$ 的单调增加区间为 $\underline{\quad [-2,\ 2]\quad}$．

5．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}e^t\,\mathrm{d}t\right)=$ $\underline{\quad 2xe^{x^2}\quad}$．

二、选择题（本大题满分 15 分，每小题 3 分）

1．当 $x\to\infty$ 时，下列变量为无穷大量的是(　D　)．

(A) $\dfrac{1}{x}\sin x$　　(B) $x\sin\dfrac{1}{x}$　　(C) e^x　　(D) $\dfrac{x^2}{x+1}$

2．$x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|(x+1)}$ 的(　D　)．

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 无穷间断点

3．设 $y=\sin x$，则 $y^{(10)}=$（　C　）.

(A) $\sin x$　　(B) $\cos x$　　(C) $-\sin x$　　(D) $-\cos x$

4．曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凹区间是（　A　）.

(A) $(-\infty,0]$　　(B) $[0,+\infty)$　　(C) $(-\infty,+\infty)$　　(D) $(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$

5．$\int_1^{+\infty}\left(\arctan(1-x)\right)'\mathrm{d}\,x=$（　B　）.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $+\infty$　　(D) $-\infty$

三、计算下列极限（本大题满分 10 分，每小题 5 分）

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+4x^{-1}}+1}$ ------3 分

$=2$. ------5 分

2．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$ ------3 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3(1+x^2)}$ ------4 分

$=\dfrac{1}{3}$. ------5 分

四、解答下列各题（本大题满分 18 分，每小题 6 分）

1．求函数 $y=\cos\dfrac{x^3}{1+x^2}$ 的导数.

解：$y'=(-\sin\dfrac{x^3}{1+x^2})\cdot(\dfrac{x^3}{1+x^2})'$ ------3 分

$$=(-\sin\frac{x^3}{1+x^2})\cdot\frac{3x^2(1+x^2)-x^3\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$ ------5 分

$$=-\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}\sin\frac{x^3}{1+x^2}.$$ ------6 分

2．求由方程 $y^3+y-x^3+x=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}\,y$.

解：原方程两边对 x 求导，得

$$3y^2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}-3x^2+1=0,$$ ------4 分

解得

$$\mathrm{d}\,y=\frac{3x^2-1}{3y^2+1}\mathrm{d}\,x.$$ ------6 分

3．设 $f(x)=(x-a)^2g(x)$， $g'(x)$ 连续，求 $f''(a)$.

解：$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)$，------1 分

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$ ------2 分

$$=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)}{x-a}$$ ------3 分

$$=\lim_{x\to a}\big(2g(x)+(x-a)g'(x)\big),$$ ------4 分

由题设 $g'(x)$ 存在且连续，知 $\lim\limits_{x\to a}g(a)=g(a)$， $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=g'(a)$，

所以 $f''(a)=2g(a)$. ------6 分

五、计算下列积分（本大题满分 18 分，每小题 6 分）

1. $\int \frac{e^x}{1+3e^x}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int \frac{1}{1+3e^x}\mathrm{d}(e^x)$ ------2 分

$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+3e^x}\mathrm{d}(1+3e^x)$ ------4 分

$=\frac{1}{3}\ln(1+3e^x)+C$. ------6 分

2. $\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$.

解：原式 $=x\operatorname{arccot} x-\int x(-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$ ------3 分

$=x\operatorname{arccot} x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$ ------4 分

$=x\operatorname{arccot} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. ------6 分

3. $\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{2x+1}$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，------2 分

原式 $=\int_1^3 \frac{1}{2}(t^2+1)\mathrm{d}t$ ------4 分

$=(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t)\Big|_1^3=\frac{16}{3}$. ------6 分

六、（本题满分 8 分）

某厂生产容积为 2 立方米的有盖圆柱形油桶，问底圆半径为何值时，用料最省？

解：设油桶表面积为y，高为h，底圆半径为r，则

$$\pi r^2 h=2,\ h=\frac{2}{\pi r^2}，\text{------2 分}$$

$$y=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{4}{r}+2\pi r^2，（r>0）\text{------4 分}$$

$$y'=-\frac{4}{r^2}+4\pi r，\text{------6 分}$$

令$y'=0$，得驻点 $r=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$． ------7 分

由于只有一个驻点，依题意，当$r=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$米时，用料最省． ------8 分

七、（本题满分 10 分）

设平面图形由曲线$y=x^2+1$与直线$y=0,\ x=1,\ x=2$所围成.

（1）求该图形的面积S；

（2）求该图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积V．

解：（1）$S=\int_1^2(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ ------3 分

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\Big|_1^2 \text{------4 分}$$

$$=\frac{10}{3}．\text{------5 分}$$

（2） $V=\pi\int_1^2(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$ ------7 分

$$=\pi\int_1^2(x^4+2x^2+1)\,\mathrm{d}x \text{------8 分}$$

$$=\pi(\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x)\Big|_1^2=\frac{178}{15}\pi．\text{-------10 分}$$

八、（本题满分 6 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $f(0)=1$， $f(1)=0$．证明：

（1）存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；

（2）存在两个不同的点 x_1，$x_2\in(0,\ 1)$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=1$．

证明：（1）令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，

$$g(0)=f(0)-0=1，\ g(1)=f(1)-1=-1，$$

由零点定理知，存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$．------3 分

（2）由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1\in(0,\ x_0)$ 和 $x_2\in(x_0,\ 1)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{x_0-1}{x_0},$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-x_0}{1-x_0},$$

于是 $f'(x_1)f'(x_2)=1$．------6 分