院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2017-2018 学年第二学期考试卷

参考解答及评分标准

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	8	14	10	14	16	8			100	
得 分												

警示：《广州大学授予学士学位工作细则》第五条：“考试作弊而被给予记过、留校察看或开除学籍处分并且被取消相应课程本次考试成绩的，不授予学士学位。”

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．已知平面 $x+ky-2z=9$ 经过点 $(5,-4,-6)$，则 $k=$ __2__.

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=$ __0__.

3．改换二次积分的积分次序：$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x}$.

4．二元函数 $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在点 $(1,1)$ 处的线性化函数是 $\underline{2x+2y-1}$.

5．二阶微分方程 $y''+4y=0$ 的特征根是 $\underline{-2i,2i}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．点 $P(a,b,c)$ 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标是（ B ）.

（A）$(a,-b,-c)$ （B）$(-a,b,-c)$ （C）$(-a,-b,c)$ （D）$(-a,-b,-c)$

2．设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f_x(1,0)=$（ A ）.

（A）0 （B）1 （C）-1 （D）不存在

3．设$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\right\}$，则二重积分$\iint\limits_D x^2y^2\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（ C ）.

（A）-1　　　　（B）1　　　　（C）0　　　　（D）$\dfrac{1}{4}$

4．曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q，线段PQ被y轴平分，则曲线满足的微分方程为（ B ）.

（A）$xy'+2y=0$　　　　（B）$yy'+2x=0$

（C）$xy'-2y=0$　　　　（D）$yy'-2x=0$

5．利用极坐标$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$计算区域$D:x^2+y^2-2Rx\le 0(R>0)$上的二重积分时，极角$\theta$的取值范围是（ D ）.

（A）$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　（B）$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　（C）$\left[0,\pi\right]$　　（D）$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

三、（本题 8 分）

验证函数$z=\arctan\dfrac{y}{x}$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \text{------3 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \text{------5 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \text{------6 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{x^2+y^2})=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \text{------7 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\ \text{------8 分}$$

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．设 $z=f\left(x+y,x^2+y^2\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）.

解：记 $u=x+y,v=x^2+y^2$，则 $z=f\left(u,v\right)$，------1 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+2xf_2'，\text{------4 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+2x\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\text{------6 分}$$

$$=f_{11}''+2yf_{12}''+2x(f_{21}''+2yf_{22}'')$$

$$=f_{11}''+2(x+y)f_{12}''+4xyf_{22}''.\text{------7 分}$$

2．设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $e^z-xyz=e^{x+y}$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解：设 $F(x,y,z)=e^z-xyz-e^{x+y}$，则

$$F_x=-yz-e^{x+y}，\quad F_z=e^z-xy，\text{------3 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz+e^{x+y}}{e^z-xy}.\text{------5 分}$$

将 $x=0$， $y=1$ 代入所给方程，得 $z=1$，------6 分

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{1+e}{e}.\text{------7 分}$$

五、（本题 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+5$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases} f_x=3x^2-8x+2y=0 \\ f_y=2x-2y=0 \end{cases}，\text{------2 分}$$

得驻点 $(0,0)$，$(2,2)$. ------4 分

记 $A=f_{xx}=6x-8$， $B=f_{xy}=2$， $C=f_{yy}=-2$，------6 分

在点 $(0,0)$ 处， $AC-B^2=12>0$，又 $A=-8<0$，

所以 $f(0,0)=5$ 是极大值；------9 分

在点 $(2,2)$ 处， $AC-B^2=-12<0$，所以 $f(2,2)$ 不是极值. ------10 分

六、计算下列二重积分（每小题 7 分，共 14 分）

1．$\iint\limits_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

解：令$D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le x\},$$
$$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 2, 0\le x\le y\},$$

则

$$\iint\limits_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{------2 分}$$
$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\,\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y(y-x)\,\mathrm{d}x \text{------4 分}$$
$$=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^2 y^2\,\mathrm{d}y \text{------6 分}$$
$$=\frac{8}{3}. \text{------7 分}$$

2．$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$是由

$$x^2+y^2=\pi^2,\quad x^2+y^2=4\pi^2,\quad y=x,\quad y=\sqrt{3}x$$

所围成的在第一象限内的闭区域.

解：令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，------1 分

积分区域D可表示为：

$$\pi\le r\le 2\pi,\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}. \text{------3 分}$$

于是

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin r}{r}r\,\mathrm{d}r \text{------4 分}$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[-\cos r\right]_\pi^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(-2)\,\mathrm{d}\theta \text{------6 分}$$
$$=-\frac{\pi}{6}. \text{------7 分}$$

七、求下列微分方程的通解或特解（每小题 8 分，共 16 分）

1．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2$，$y\big|_{x=0}=1$．

解：对应的齐次方程为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$，分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x，\text{------1 分}$$

两边积分并解出y的显式，得

$$y=C(x+1)^2.\text{-------3 分}$$

设$y=C(x)(x+1)^2$，代入原方程得

$$C'(x)=1\Rightarrow C(x)=x+C，$$

故原方程的通解为

$$y=C(x+1)^2+x(x+1)^2.\text{-------6 分}$$

又$y\big|_{x=0}=1$，代入通解中，得$C=1$，故所求的特解为

$$y=(x+1)^3.\text{-------8 分}$$

2．$y''-y=4xe^x$．

解：对应的齐次方程为$y''-y=0$，其特征方程为$r^2-1=0$，特征根为$r_1=-1$，$r_2=1$，所以齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.\text{-------3 分}$$

由于 $f(x)=4xe^x$中$\lambda=1$是一个单特征根，故可设特解为

$$y^*=x(ax+b)e^x，\text{------5 分}$$

$$\left(y^*\right)'=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx\right)e^x，$$

$$\left(y^*\right)''=(4ax+2a+2b)e^x+\left(ax^2+bx\right)e^x，$$

代入原方程得

$$(4ax+2a+2b)e^x=4xe^x\ \Rightarrow\ a=1,b=-1，\text{------7 分}$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x+x(x-1)e^x.\text{-------8 分}$$

八、（本题 8 分）

证明二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微.

证明：由于

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y|\le|y|，\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}|y|=0，$$

由夹逼法知

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|f(x,y)\right|=0\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)，$$

因此函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续. ------3 分

由 $f(x,0)=0$，得 $f_x(x,0)=0$， $f_x(0,0)=0$，同理可得 $f_y(0,0)=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处偏导数存在. ------5 分

于是

$$\Delta f-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}，$$

记$\Delta x=\rho\cos\theta$，$\Delta y=\rho\sin\theta$，则

$$\frac{\Delta f-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\rho}=\cos\theta\sin\theta，$$

当$\rho\to0$时，上式不存在极限，所以函数 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处不可微. ------8 分